ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ» КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ТЕХНОЛОГИЯ ПОДВОДЯЩИХ ЗАДАЧ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Сборник материалов тьюторов

Краснодар, 2020

УДК 373.5
ББК 74.262.21
Т 38

Рецензенты:
Терещенко И.В., к.ф.-м.н., заведующий кафедрой общей математики КубГТУ
Терновая Л.Н., к.п.н., проректор по учебной работе ГБОУ ИРО Краснодарского края

Ответственные редакторы:
Барышенский Д.С., заведующий кафедрой математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края
Белай Е.Н., доцент кафедры математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края
Васильева И.В., доцент кафедры математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края
Сукманюк В.Н., доцент кафедры математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края
Василишина Н.В., старший преподаватель кафедры математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края
Шумаев П.Г., преподаватель кафедры математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края

Т-38 ***Технология подводящих задач при подготовке к итоговой аттестации : сборник материалов тьюторов*** / ответственные редедакторы: Д. С. Барышенский, Е. Н. Белай, И. В. Васильева, В. Н. Сукманюк, Н. В. Василишина, П. Г. Шумаев. – Краснодар : ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2020. – 224 с. – Текст : непосредственный.

В сборнике представлены методические разработки тьюторов ЕГЭ и ГИА-9 по математике Краснодарского края для подготовки обучающихся к итоговой аттестации, основанные на технологии подводящих задач.

Материалы сборника представляют интерес для заместителей директоров образовательных организаций, руководителей методических объединений, учителей математики, а также выпускников 9-х и 11-х классов.

Решением Ученого совета ГБОУ ИРО Краснодарского края
Протокол № _4_ от _31.08.2020__ 2020 г.

Уважаемые читатели!

Данный сборник – это совместный труд многих специалистов. Он составлен преподавателями кафедры математики и информатики ГБОУ ИРО Краснодарского края на основе материалов, подготовленных учителями математики – региональными тьюторами ЕГЭ и ГИА-9, по основным разделам школьного курса математики. Каждая глава пособия построена на основе системы подводящих заданий по определенной теме: представлен необходимый краткий теоретический материал (определение понятий, свойства), разбор типовых заданий, задания для самостоятельного решения и ответы. Все задания расположены в порядке повышения уровня: от простого к сложному. Пособие предназначено для обобщающего повторения и подготовки к итоговой аттестации в форме ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Данное пособие поможет учителю математики организовать работу обучающихся на уроке закрепления или обобщения изученного материала, а также для контроля уровня усвоения определенной темы.

Для выпускников образовательных организаций пособие поможет самостоятельно повторить, закрепить проблемные темы и проверить свой результат.

Оглавление

1. Уравнения……………………………………………………………1

1.1 Показательные уравнения……………………………………...2

1.2 Иррациональные уравнения…………………………………..7

1.3 Логарифмические уравнения…………………………………11

1.4 Тригонометрические уравнения……………………………...18

2. Неравенства…………………………………………………………25

2.1 Иррациональные неравенства………………………………..26

2.2 Показательные неравенства…………………………………..32

2.3 Логарифмические неравенства……………………………….37

2.4 Тригонометрические неравенства……………………………45

3. Математические модели…………………………………………..54

3.1 Задачи на смеси и сплавы……………………………………..55

3.2 Задачи экономического содержания………………………….63

3.3 Задачи на совместную работу…………………………………72

3.4 Задачи с параметрами…………………………………………..91

3.5 Теория вероятностей………………..…………………………...97

4. Геометрия. Планиметрия…………………………………………..116

4.1 Тема: «Биссектриса треугольника и её свойства»……………..117

4.3 Тема: «Планиметрия. Окружность»……………………………..124

4.4 Тема: «Медиана треугольника»………………………………..136

4.5 Тема: «Серединный перпендикуляр»…………………………140

5. Геометрия. Стереометрия…………………………………………..143

5.1 Расстояния……………………………………………………...143

5.2 Площади поверхностей и объёмы тел…………………………153

5.3 Поверхности геометрических тел……………………………...175

5.4 Угол между плоскостями……………………………………….193

5.6 Угол между двумя прямыми…………………………………….207

5.7 Угол между прямой и плоскостью……………………………..214

1. Уравнения

Составители:

1. Ветюгова Светлана Ахметовна, учитель математики, МБОУ СОШ№ 34 имени А.И. Покрышкина, ст-ца Новотитаровская, МО Динской район.
2. Бондарец Светлана Михайловна, учитель математики, БОУ СОШ№ 5,ст-ца Пластуновская, МО Динской район.
3. Тихомирова Евгения Александровна, учитель математики,МБОУСОШ№53 имени героя Советского Союза А.Н. Березовского, п. Найдорф, МО Динской район.
4. Статникова Маргарита Юрьевна, учитель математики , БОУСОШ№2 , ст-ца Динская, МО Динской район.
5. Якушенко Галина Алексеевна - учитель математики, МБОУ СОШ № 5, ст. Стародеревянковская, Каневской район
6. Коломиец Надежда Ильинична, учитель математики МАОУ СОШ №35 имени А. А. Лучинского пгт. Новомихайловский Туапсинского района
7. Лещенко Светлана Ивановна, учитель математики, МБОУ СОШ № 8 им. Ю. А. Гагарина, г. Туапсе, МО Туапсинский район
8. Саламаха Надежда Сергеевна, учитель математики, МБОУ СОШ№85 им. В.Иванкина, г. Краснодар
9. Котик Светлана Алексеевна, учитель математики МОБУГ 2 им. И. С. Колесникова г. Новокубанска,
10. Борщакова Елена Николаевна, учитель математики МОАУСОШ 4 им. А. И. Миргородского г. Новокубанска
11. Есауленко Нелли Николаевна учитель математики, МБОУ СОШ № 35 им. А. В Гусько, ст Новоминская, Каневской район
12. Джимова Светлана Григорьевна, учитель математики, МБОУ СОШ№ 43, ст. Холмская, Абинский район
13. Тищенко Ольга Юрьевна учитель математики МАОУ гимназии 25, г. Краснодар
14. Одинцова Наталья Валерьевна, учитель математики, МАОУ СОШ №15, г-к Анапа
15. Муратова Галина Анатольевна, учитель математики МАОУ СОШ 3 им. Кавалера ордена Мужества Анастаса Шембелиди, г. Анапа
16. Свидина Елена Геннадьевна учитель математики МБОУ СОШ 49 чт. Смоленской северского района

1.1 Показательные уравнения

Карточка 1

<table>
<tr><th colspan="2">Общие рекомендации</th><th colspan="2">Алгоритм решения</th></tr>
<tr><td colspan="2">При решении показательных уравнений используют свойства степени:
при a>0
$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$ $\quad a^k : a^m = a^{k-m}$
$\left(a^k\right)^m = a^{k \cdot m}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$a^{-k} = \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$ $\quad a^k = \left(\frac{1}{a}\right)^{-k}$
$a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}, k \in \mathrm{N}, k > 1$ $\quad a^0 = 1$</td><td colspan="2">Простейшие показательные уравнения решают приведением обеих частей уравнения к одному основанию**: $a^x = a^y$,** откуда получают **$x = y$** <u>(равны показатели).</u></td></tr>
<tr><th colspan="2">Примеры решения</th><th colspan="2">Заполни пропуски:</th></tr>
<tr><td>1)$2^{2x-4}=64$
$2^{2x-4}=2^6$
$2x-4=6$
$x=5$
проверка:
$2^{2\cdot 5-4}=64$
$2^6=64$
Ответ:5</td><td>2) $3^{2x+4}=1$
$3^{2x+4}=3^0$
$2x+4=0$
$x=-2$
проверка:
$3^{2\cdot(-2)+4} \cdot =3^0$
$3^0=3^0$
Ответ: -2</td><td>а)$3^{2x-4}=81$
$3^{2x-4}=$______________
x- 4=______________

x=________________
проверка:
____
____
Ответ:___</td><td>б)$6^{x+6}=1$
____

x+6=_____________

x=_______________
проверка:
____
____
Ответ:___</td></tr>
<tr><th colspan="4" align="left">Реши самостоятельно:</th></tr>
<tr><td>1) $5^{x-4}=125$
____
____
________________</td><td>2) $7^{2x+3}=49$
____
____
________________</td><td>3) $4^{2x+1}=1$
____
____
________________</td><td>4) $128^{-5x+4}=1$
____
____
________________</td></tr>
<tr><td>5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8}=\frac{1}{9}$
____
____
____
________________</td><td>6) $9^{4x+2}=81$
____
____
____
________________</td><td>7) $8^{-3+x}=512$
____
____
____
________________</td><td>8) $\left(\frac{1}{7}\right)^{4-2x}=1$
____
____
____
________________</td></tr>
</table>

Карточка 2

<table>
<tr><th colspan="2">Общие рекомендации</th><th colspan="2">Алгоритм решения</th></tr>
<tr><td colspan="2">При решении показательных уравнений используют свойства степени:
при a>0
$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$ $\quad a^k : a^m = a^{k-m}$
$\left(a^k\right)^m = a^{k\cdot m}$ $\quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$a^{-k} = \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$ $\quad a^k = \left(\frac{1}{a}\right)^{-k}$
$a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}, k \in \mathrm{N}, k>1$ $\quad a^0 = 1$ $\quad a^0 = 1$</td><td colspan="2">Простейшие показательные уравнения решают приведением обеих частей уравнения к одному основанию: $\mathbf{a^x = a^y}$, откуда получают $\mathbf{x = y}$ (равны показатели).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примеры решения</td><td colspan="2">Заполни пропуски:</td></tr>
<tr><td>1)) $6^{4-x}=1/6$
$6^{4-x}=6^{-1}$
4-x=-1
x=5
проверка:
$6^{4-5}=1/6$
$6^{-1}=1/6$
Ответ:5</td><td>2) $2^{3+x}=0{,}5\cdot 2^{3x}$
$2^{3+x}=2^{-1}\cdot 2^{3x}$
3+x= -1+3x
x=2
проверка:
$2^{3+2}=0{,}5\cdot 2^{3\cdot 2}$
$2^5=0{,}5\cdot 2^6$
Ответ: 2</td><td>а)$3^{2x-4}=\frac{1}{81}$
3^{2x-4}=____________

2x-4=_____________
x=
проверка:
____
____
Ответ:_____</td><td>б)$6^{x+6}=\frac{1}{6}\cdot 6^{2x+5}$
____

x+6=______________

x=________________
проверка:
____
____
Овет:________</td></tr>
<tr><td colspan="4">Реши самостоятельно:</td></tr>
<tr><td>1) $5^{x-4}=\frac{1}{125}$
____
____
________________</td><td>2) $7^{2x+3}=\frac{1}{343}$
____
____
________________</td><td>3) $4^{2x+1}=0{,}25\cdot 4^{-3x}$
____
____
________________</td><td>4) $8^{-5x+4}=\frac{1}{5}\cdot 2^{5x}$
____
____
________________</td></tr>
<tr><td>5) $(\frac{1}{9})^{x-13}=3$
____
____
____
________________</td><td>6) $(\frac{1}{8})^{-3+x}=512$
____
____
____
________________</td><td>7) $16^{x-9}=0{,}5$
____
____
____
________________</td><td>8) $9^{-5+x}=\frac{1}{729}$
____
____
____
________________</td></tr>
</table>

Карточка 3

Общие рекомендации	Алгоритм решения
При решении показательных уравнений используют свойства степени: ***при а>0*** $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$ $a^k : a^m = a^{k-m}$ $\left(a^k\right)^m = a^{k \cdot m}$ $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$ $a^{-k} = \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$ $a^k = \left(\frac{1}{a}\right)^{-k}$ $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}, k \in \mathrm{N}, k > 1$ $a^0 = 1$ $a^0 = 1$	Простейшие показательные уравнения решают приведением обеих частей уравнения к одному основанию**:** $\mathbf{a^x = a^y}$**,** откуда получают **x = y** (равны показатели).

Примеры решения		**Заполни пропуски:**	
1)$3^{2x+4} \cdot 3^{x+5} = 3^{12}$ (2x+4)+(x+5)=12 3x+9=12 x=1 **проверка:** $3^{2 \cdot 1+4} \cdot 3^{1+5} = 3^{12}$ $3^6 \cdot 3^6 = 3^{12}$ $3^{12} = 3^{12}$ **Ответ: 1**	2) $3^{2x+4} : 3^{x+5} = 3^{12}$ (2x+4)-(x+5)=12 2x+4-x-5=12 x=13 **проверка:** $3^{2 \cdot 13+4} : 3^{13+5} = 3^{12}$ $3^{30} : 3^{18} = 3^{12}$ $3^{12} = 3^{12}$ **Ответ: 13**	а)$5^{3x-1} \cdot 5^{2x+3} = 5^8$ (3x-1)+_____=8 _____________ _____________ x= Ответ:_____	б)$5^{3x-1} : 5^{2x+3} = 5^8$ (3x-1)-_____=8 _____________ _____________ x= Ответ:

Реши самостоятельно:			
1) $6^{x-6} \cdot 6^{5x-3} = 216$ __________________ __________________ __________________ __________________	2) $6^{2x-6} : 6^{5x-3} = 216$ __________________ __________________ __________________ __________________	3) $4^{2x+1} \cdot 4^{3x+2} = 16$ __________________ __________________ __________________ __________________	4) $4^{2x+1} : 4^{3x+2} = 16$ __________________ __________________ __________________ __________________
5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} \cdot 9^{2x} = \frac{1}{9}$ __________________ __________________ __________________	6) $9^{4x+2} : 9^{6x-3} = 81$ __________________ __________________ __________________ __________________	7) $8^{-3+x} \cdot 8^{-x+1} = 512$ __________________ __________________ __________________	8) $\left(\frac{1}{7}\right)^{4-2x} \cdot 7^{3x} = 1$ __________________ __________________

Карточка 4

Общие рекомендации	Алгоритм решения
При решении показательных уравнений используют свойства степени: ***при а>0*** $a^k\cdot a^m=a^{k+m}$ $a^k:a^m=a^{k-m}$ $\left(a^k\right)^m=a^{k\cdot m}$ $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$ $a^{-k}=\frac{1}{a^k}=\left(\frac{1}{a}\right)^k$ $a^k=\left(\frac{1}{a}\right)^{-k}$ $a^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{a}, k\in \mathrm{N}, k>1$ $a^0=1$ $a^0=1$	Простейшие показательные уравнения решают приведением обеих частей уравнения к одному основанию**: $a^x=a^y$,** откуда получают **$x=y$** (равны показатели).

Примеры решения		**Заполни пропуски:**	
1) $3^{2x+4}=0{,}6\cdot5^{2x+4}$ $\frac{3^{2x+4}}{5^{2x+4}}=\frac{3}{5}$ $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+4}=\frac{3}{5}$ $2x+4=1$ $x=-1{,}5$ **проверка:** $3^{2\cdot(-1,5)+4}=0{,}6\cdot5^{2\cdot(-1,5)+4}$ $3^1=0{,}6\cdot5^1$ $3^1=3$ **Ответ: -1,5**	2) $3^{2x}+3^{2x+1}=12$ $3^{2x}(1+3)=12$ $3^{2x}\cdot4=12$ $3^{2x}=3$ $2x=1$ $x=0{,}5$ **проверка:** $3^{2\cdot0,5}+3^{2\cdot0,5+1}=12$ $3^1+3^2=12$ $12=12$ **Ответ: 0,5**	а) $5^{3x-1}=2{,}5\cdot2^{3x-1}$ $5^{3x-1}=\frac{5}{2}\cdot$ ____ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ x= Ответ:______	б) $5^{3x+1}-5^{3x}=20$ 5^{3x}(______)=20 ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ x= Ответ:

Реши самостоятельно:			
1) $9^{2+5x}=1{,}8\cdot5^{2+5x}$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	2) $6^{2x-6}=1{,}2\cdot5^{2x-6}$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	3) $4^{3x+1}+4^{3x}=80$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	4) $4^{2x+2}-4^{2x}=60$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________
5) $3^{5x-1}=1{,}5\cdot2^{5x-1}$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	6) $7^{2x+2}-7^{2x}=336$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	7) $11^{-3x+2}=5{,}5\cdot2^{-3x+2}$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________	8) $8^{3x+2}-32\cdot8^{3x}=256$ ____________________ ____________________ ____________________ ____________________

Ответы на самостоятельную работу.

	а	б	1	2	3	4	5	6	7	8
Карточка 1	4	-6	7	-0,5	-0,5	0,8	10	0	6	2
Карточка 2	0	2	7	-3	-0,4	0,5	12,5	0	9,25	2
Карточка 3	1,2	12	2	-2	-0,2	-3	2	1,5	реш. нет	0,8
Карточка 4	х-любое	1/3	х-любое	х-любое	2/3	0,5	х-любое	0,5	х-любое	1/3

1.2 Иррациональные уравнения

Карточка 1.

<table>
<tr><td colspan="2">Общие рекомендации</td><td colspan="2">Алгоритм решения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ или $\sqrt[n]{f(x)} = C$ решаем методом возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.</td><td colspan="2">1) возводим обе части уравнения в n-ю степень: $(\sqrt[n]{f(x)})^n = (g(x))^n$ или $(\sqrt[n]{f(x)})^n = C^n$;
2) получим уравнение $f(x) = (g(x))^n$ или $f(x) = C^n$.
3) решаем уравнение и делаем проверку</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примеры решения</td><td colspan="2">Заполни пропуски:</td></tr>
<tr><td>1) $\sqrt{5x+6} = 6$.
$5x + 6 = 36$,
$5x = 36 - 6$;
$5x = 30$;
$x = 6$.
Проверка.
$\sqrt{5 \cdot 6 + 6} = 6$,
6 = 6 – верно.
Ответ: 6</td><td>2) Найдите корень уравнения $\sqrt{x} = x - 2$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
Решение:
$x = x^2 - 4x + 4$,
$x^2 - 5x + 4 = 0$,
$x_1 = 4$, $x_2 = 1$
Проверка: при $x_1 = 4$,
$\sqrt{4} = 4 - 2$,
2 = 2 – верно.
$x_1 = 4$ корень уравнения.
При $x_2 = 1$
$\sqrt{1} = 1 - 2$, 1 = - 1 – неверно. $x_2 = 1$ не является корнем.
Ответ: 4.</td><td>1). Решите уравнение $\sqrt{9x-9} = 3$.
Решение:
$9x - 9 =$ __________
$9x =$ ______________
$x =$ ______________
Проверка:
____
____
Ответ: _______</td><td>2) Решите уравнение $\sqrt{63-9x} = 2x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
Решение:
$63 - 9x =$ __________
$4x^2$ __________ $= 0$
$x_1 =$ ____, $x_2 =$ _____
Проверка.
____
____
Ответ:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Реши самостоятельно:</td></tr>
<tr><td>1) $\sqrt{-32+4x} = 2$
____
____
____
____
____
__________________</td><td>2) $\sqrt[3]{2x-5} = 3$
____
____
____
____
____
__________________</td><td>3) Решите уравнение $\sqrt{42-13x} = -2x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите наибольший из них.
____
____
____
__________________</td><td>4) Решите уравнение $\sqrt{3x+1} + 1 = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
____
____
____
____
__________________</td></tr>
</table>

Карточка 2.

<table>
<tr><td colspan="2">Общие рекомендации</td><td colspan="2">Алгоритм решения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ или $\sqrt[n]{f(x)}=C$ решаем методом возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.</td><td colspan="2">1) возводим обе части уравнения в n-ю степень: $(\sqrt[n]{f(x)})^n=(g(x))^n$ или $(\sqrt[n]{f(x)})^n=C^n$;
2) получим уравнение $f(x)=(g(x))^n$ или $f(x)=C^n$.
3) решаем уравнение и делаем проверку.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примеры решения</td><td colspan="2">Заполни пропуски:</td></tr>
<tr><td>1) $\sqrt{5x+6}=6$.
$5x$ + 6 = 36,
$5x$ = 36 - 6;
$5x$ = 30;
x = 6.
Проверка.
$\sqrt{5\cdot 6+6}=6$,
6 = 6 – верно.
Ответ: 6</td><td>2) Найдите корень уравнения $\sqrt{x}=x-2$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
Решение:
$x=x^2-4x+4$,
$x^2-5x+4=0$,
$x_1=4$, $x_2=1$
Проверка: при $x_1=4$,
$\sqrt{4}=4-2$,
2 = 2 – верно.
$x_1=4$ корень уравнения.
При $x_2=1$
$\sqrt{1}=1-2$, 1 = - 1 – неверно. $x_2=1$ не является корнем.
Ответ: 4.</td><td>1). Решите уравнение $\sqrt{9x-9}=3$.
Решение:
$9x-9=$ ______
$9x=$ ______
$x=$
______
Проверка:
______
______
Ответ: ______</td><td>2) Решите уравнение $\sqrt{63-9x}=2x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
Решение:
$63-9x=$ ______
$4x^2$ ______ $=0$
$x_1=$ ____, $x_2=$ ____
Проверка.
______
______
Ответ:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Реши самостоятельно:</td></tr>
<tr><td>1) $\sqrt{88+7x}=9$
______
______
______
______
______
______</td><td>2) $\sqrt[3]{3x+4}=-2$
______
______
______
______
______
______</td><td>3) Решите уравнение $\sqrt{17x+84}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите сумму этих корней.
______
______
______
______
______
______</td><td>4) Решите уравнение $\sqrt{9-x}-2=x-5$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
______
______
______
______
______
______</td></tr>
</table>

Карточка 3.

<table>
<tr><th colspan="2">Общие рекомендации</th><th colspan="2">Алгоритм решения</th></tr>
<tr><td colspan="2">Простейшие иррациональные уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ или $\sqrt[n]{f(x)} = C$ решаем методом возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.</td><td colspan="2">1) возводим обе части уравнения в n-ю степень: $(\sqrt[n]{f(x)})^n = (g(x))^n$ или $(\sqrt[n]{f(x)})^n = C^n$;
2) получим уравнение $f(x) = (g(x))^n$ или $f(x) = C^n$.
3) решаем уравнение и делаем проверку.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Примеры решения</th><th colspan="2">Заполни пропуски:</th></tr>
<tr>
<td>1) $\sqrt{5x+6} = 6$.
$5x + 6 = 36$,
$5x = 36 - 6$;
$5x = 30$;
$x = 6$.
Проверка.
$\sqrt{5 \cdot 6 + 6} = 6$,
6 = 6 – верно.
Ответ: 6</td>
<td>2) Найдите корень уравнения $\sqrt{x} = x - 2$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
Решение:
$x = x^2 - 4x + 4$,
$x^2 - 5x + 4 = 0$,
$x_1 = 4$, $x_2 = 1$
Проверка: при $x_1 = 4$, $\sqrt{4} = 4 - 2$,
2 = 2 – верно.
$x_1 = 4$ корень уравнения.
При $x_2 = 1$
$\sqrt{1} = 1 - 2$, 1 = - 1 – неверно. $x_2 = 1$ не является корнем.
Ответ: 4.</td>
<td>1). Решите уравнение $\sqrt{9x-9} = 3$.
Решение:
$9x - 9 =$ ______________
$9x =$ _______________
$x =$ __________________
Проверка:
____
____
Ответ: _______</td>
<td>2) Решите уравнение $\sqrt{63-9x} = 2x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.
Решение:
$63 - 9x =$ ____________
$4x^2$ __________ $= 0$
$x_1 =$ ____, $x_2 =$ _____
Проверка.
____
____
Ответ:</td>
</tr>
<tr><th colspan="4">Реши самостоятельно:</th></tr>
<tr>
<td>1) $\sqrt{37-4x} = 3$
____
____
____
____
____
___________________</td>
<td>2) $\sqrt[5]{2x+6} = 2$
____
____
____
____
____
___________________</td>
<td>3) Решите уравнение $\sqrt{164-5x} = 3x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.
____
____
____
____
___________________</td>
<td>4) Решите уравнение $2 + \sqrt{x+6} = x - 4$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите произведение этих корней.
____
____
____
____
__________________</td>
</tr>
</table>

Ответы на самостоятельную работу.

	1	2	3	4
Карточка 1	9	16	2	5
Карточка 2	- 1	- 4	17	0
Карточка 3	7	13	4	10

Задания с пропусками: 1) 2; 2) 3.

1.3 Логарифмические уравнения

$log_a f(x)$ =b, где a>0, a≠ 1, f(x)> 0 – простейшее логарифмическое уравнение		
КАРТОЧКА № 1		
Этапы решения	Образец решения	Продолжи решение
	$\log_5 x = 2$	1) $\log_{0,2} x = -3$
Область допустимых значений (***f(x)>0)***	x >0	x >…
воспользоваться определением логарифма ***($\log_a f(x) = b$, $f(x) = a^b$)***	$x = 5^2$ x = 25	$x = (0,2)^{\dots}$ $x = (\dots)^3$ x = 125
Проверка 1)	25>0	… >0
Ответ	25	…

Реши самостоятельно и выбери правильный ответ				
2) $\log_4 x = 1$	3) $\log_{0,5} x = -3$	4) $\log_9 x = 0$	5) lgx =2	6) $\log_3 x = 3$

а) 4; б) 100; в) 8; г) 27; д) 0,25 ; е) 1; з) 81
Дополнительно: 7) $\log_3 x = 4$ 8) $\log_{0.5} x = -1$ 9) $\log_5 x = -2$ 10) $\log_{0.4} x = 2$

$\log_a f(x) = b$, где $a>0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ – простейшее логарифмическое уравнение

КАРТОЧКА № 2

	$\log_5(1 + 2x) = 2$	1)$\log_{0,5}(3x + 31) = -2$
Область допустимых значений (***f(x)>0)*** (решать на свое усмотрение)	$1 + 2x > 0$ ($2x > -1$, $x > -0,5$- можно не выполнять)	…. > 0 ($3x > -…$, $x > -…$, можно не выполнять)
воспользоваться определением логарифма ***($\log_a f(x) = b$, $f(x) = a^b$)***	$1 + 2x = 5^2$ $1 + 2x = 25$ $2x = 25 – 1$ $2x = 24$ $x = 24:2$ $x = 12$	…….. $= (0,5)^{-2}$ ………$= 2^2$ $3x = 4 –$ … …$=$ - … $x =$ … : 3 $x =$ …
Проверка	$1 + 2\cdot12 > 0$ (верно) ($12 > -0,5$)	$3\cdot$…$+ 31 > 0$ (….) (…. $> -0,5$)
Ответ	12	….

Реши самостоятельно и выбери правильный ответ

2) $\log_4(2x - 1) = 1$	3) $\log_{0,5}(7 – x) = -2$	4) $\log_9(27x) = 3$	5) $\lg(72 – 4x) = 2$	6) $\log_3(8x-5) = 3$

а) 4; б)- 7; в)3; г) 27; д) 2,5 ; е) 1; з) 81

Дополнительно: 7) $\log_3(3x - 6) = 4$; 8) $\log_{0,5}(4 – 2x) = -1$; 9) $\log_5(4-5x) = 2$; 10) $\log_{0.4}(2x + 7) = 2$

<table>
<tr><td colspan="5">$\log_a f(x) = b$, где $a>0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ – простейшее логарифмическое уравнение f(x)</td></tr>
<tr><td colspan="5">КАРТОЧКА № 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Этапы решения</td><td>Образец решения</td><td colspan="2">Продолжи решение</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$\log_6(8 - x) = \log_6 3$</td><td colspan="2">1) $\log_2(5 + x) = \log_2 3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Область допустимых значений (f(x)>0) (решать на свое усмотрение)</td><td>$8 – x > 0$</td><td colspan="2">…… > 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сравниваем подлогарифмические выражения, решаем получившееся уравненение</td><td>$8 – x = 3$
$- x = 3 – 8$
$- x = - 5$
$x = 5$</td><td colspan="2">5 + x =…
x = … - 5
x =</td></tr>
<tr><td colspan="2">Проверка</td><td>$8 – 5 > 0$(верно)</td><td colspan="2">…… > 0 (верно)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ</td><td>5</td><td colspan="2">……</td></tr>
<tr><td colspan="5">Реши самостоятельно и выбери правильный ответ</td></tr>
<tr><td>2)
$\log_7(9+x)=\log_7 2$</td><td>3)
$\log_5(1-x) =\log_5 7$</td><td>4)
$\log_2(3+4x)=\log_2 15$</td><td>5)
$\lg(16+x)=\lg 21$</td><td>6)
$\log_{0,2}(8+x)=\log_{0,2}10$</td></tr>
<tr><td colspan="5">а) 5; б)- 7; в)- 6; г) 2; д) 3; е)1; з) 81</td></tr>
<tr><td colspan="5">Дополнительно: 7) $\log_4(9 +x) = \log_4 7$;   8) $\log_{0.3}(2x - 5) = \log_{0.3}7$; 9) $\log_{0.7}(9x - 7) = \log_{0.7}11$</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="5">$\log_a f(x) = b$, где $a>0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ – простейшее логарифмическое уравнение</td></tr>
<tr><td colspan="5">КАРТОЧКА № 4</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">$\log_6(x^2+2x)=\log_6(x^2+10)$</td><td>1) $\log_4(x+3)=\log_4(4x-15)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Область допустимых значений (f(x)>0) (решать на свое усмотрение)</td><td colspan="2">$\begin{cases} x^2+2x>0 \\ x^2+10>0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} x+3>0 \\ 4x-15>0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сравниваем подлогарифмические выражения, решаем получившееся уравненение</td><td colspan="2">$x^2+2x = x^2+10$
$x^2+2x - x^2 - 10 = 0$
$2x - 10 = 0$
$2x = 10$
$x = 10 : 2$
$x = 5$</td><td>x + 3 = ……..
x – 4x = - 15 …..
- 3x = …….
x = ……: (-3)
x = …</td></tr>
<tr><td colspan="2">Проверка</td><td colspan="2">$\begin{cases} 5^2+2\cdot 5>0(\text{верно}) \\ 5^2+10>0(\text{верно}) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} \ldots\ldots+3>0(\ldots\ldots) \\ 4\cdot\ldots-15>0(\ldots\ldots) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ответ</td><td colspan="2">5</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Реши самостоятельно и выбери правильный ответ</td></tr>
<tr><td>2)
$\log_7(x+6)=\log_7(4x-9)$</td><td>3)
$\log_9(2x-2)=\log_9(x+5)$</td><td>4)
$\lg(x+8) = \lg(5x-4)$</td><td>5)
$\log_3(2x-17)=\log_9(x+9)$</td><td>6)
$\log_2(4x-7)=\log_2(x+5)$</td></tr>
<tr><td colspan="5">а) 5; б) 7; в)- 6; г) 26; д) 3; е)1;з) 4</td></tr>
<tr><td colspan="5">Дополнительно:7) $\log_4(9+x) = \log_4(3-4x)$; 8) $\log_{0,3}(x-5) = \log_{0,3}(2+0,5x)$; 9)$\log_{0,7}(9x-7) = \log_{0,7}(4x+3)$</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="5"></td></tr>
</table>

$\log_a f(x)=b$, где $a>0$, $a\neq 1$, $f(x)>0$ – простейшее логарифмическое уравнение		
КАРТОЧКА № 5		
Этапы решения	Образец решения	Продолжи решение
	$\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$	1) $\log_5(6+5x)-1=\log_5(2-x)$
Область допустимых значений (***f(x)>0)*** (решать $\log_a b$ на свое усмотрение)	$\begin{cases} 7-x>0 \\ 3-x>0 \end{cases}$	$\begin{cases} 6+5x>0 \\ 2-\text{x}>0 \end{cases}$
Применяя свойства логарифмов: I)$\log_a b+\log_a c=\log_a bc$; II) $\log_a b-\log_a c=\log_a b/c$; III)$\log_a b^r=r\log_a b$ приводим ко 2-4 типу.	$\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1\log_5 5$ $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+\log_5 5$ $\log_5(7-x)=\log_5 5(3-x)$ $\log_5(7-x)=\log_5(15-5x)$ 7 – x = 15 – 5x -x + 5x = 15 – 7 4x = 8 x = 8 : 4 x = 2	$\log_5(6+5x)=\log_5(2-x)+1$ $\log_5(6+5x)=\log_5(2-x)+\ldots$.. $\log_5(6+5x)=\log_5(\ldots\ldots..)$ 6+ 5x = ……………. ____________________ ____________________ – ____________________ – ____________________ __
Проверка	$\begin{cases} 7-2>0 \text{ (верно)} \\ 3-2>0 \text{ (верно)} \end{cases}$	$\begin{cases} 6+\cdots..>0 \\ 2-\cdots..>0 \end{cases}$
Ответ	2	…..
Реши самостоятельно и выбери правильный ответ		
2) $\log_2(4+x)=\log_2(2-x)+2$	3)$\log_3(7+2x)-2=\log_3(3-2x)$	4) $\log_2(8+x)=\log_2(5+x)+1$
а) -2; б) 7; в)- 6; г) 26; д) 3; е)1;з) 0,8		
Дополнительно: 5) $\log_3(8+5x)=\log_3(8-5x)+1$; 6) $\log_3(7+x)-2=\log_3(7-3x)$		

$\log_a f(x) = b$, где $a>0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ – простейшее логарифмическое уравнение

КАРТОЧКА № 6

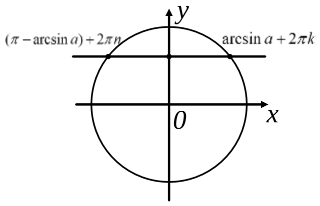
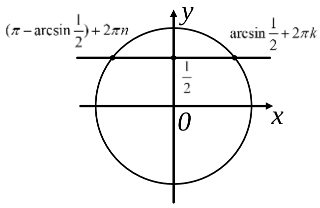
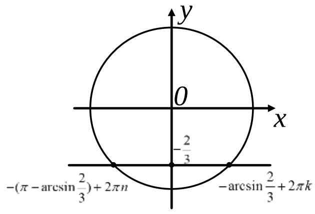
Этапы решения	Образец решения	1) Продолжи решение
	6) $\log_{x-2} 49 = 2$	$\log_{x+5} 4 = 2$
Область допустимых значений (***f(x)>0)*** (решать на свое усмотрение)	$\begin{cases} x-2>0 \\ x-2 \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \dots\dots\dots. > 0 \\ \dots\dots\dots. \neq 1 \end{cases}$
Воспользоваться определением логарифма ***($\log_a f(x) = b$, $f(x) = a^b$)***	$(x-2)^2 = 49$ $x-2 = -7$; $x-2 = 7$ $x = -7+2$; $x = 7+2$ $x = -5$; $x = 9$	…………= 4 ………….; ………… ………….; …………. ……….; …………
Проверка	- 5 : - 5 -2>0 (неверно) 9: $\begin{cases} 9-2>0 (\text{верно}) \\ 9-2 \neq 1 (\text{верно}) \end{cases}$	……..: $\begin{cases} \dots\dots\dots. > 0 \dots\dots.. \\ \dots\dots\dots\dots \neq 1 \dots\dots.. \end{cases}$ ……..: $\dots\dots\dots. > 0 \dots\dots..$ $\dots\dots\dots\dots \neq 1 \dots\dots..$
Ответ	9	……
Реши самостоятельно и выбери правильный ответ		
2) $\log_{x+1} 25 = 2$	3) $\log_{x-3} 81 = 4$	4) $\log_{x+3} 16 = 4$
а) 4; б) 7; в) 6; г) 26; д) 3; е) -1;з) 0,8		
Дополнительно:5) $\log_{x-2} 36 = 2$ 6) $\log_{x-2} 125 = 3$ 7) $\log_{x-2} 64 = 2$		

Ответы

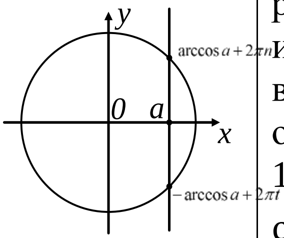
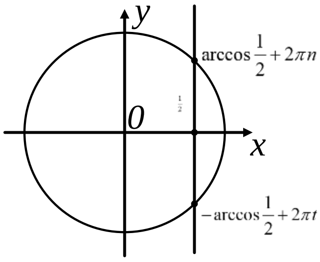
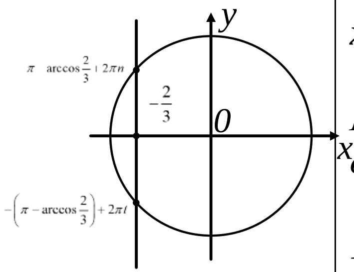
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Карточка 1	125	а	в	е	б	г	81	2	0,04	0,16
Карточка 2	-9	д	в	г	б	а	29	1	-4,2	-3,42
Карточка 3	-2	б	в	д	а	г	-2	6	2	
Карточка 4	6	а	б	д	г	з	-1,2	14	2	
Карточка 5	0,4	з	е	а	0,8	2				
Карточка 6	-3	а	в	е	8	7	10			

1.4 Тригонометрические уравнения

Карточка № 1

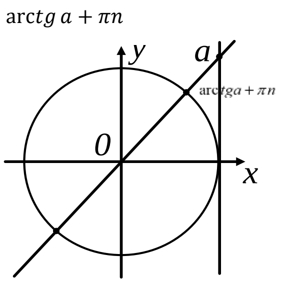
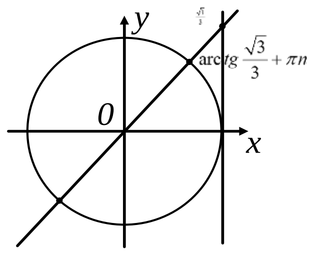
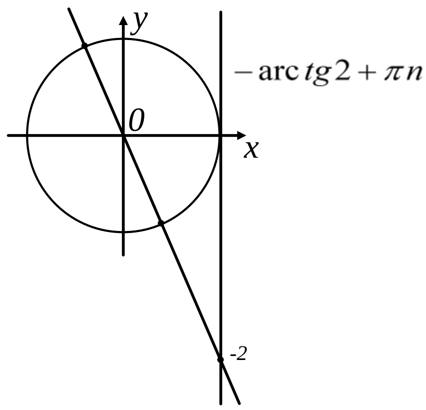
Теория	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
$\boldsymbol{Sin}\ \Delta = \boldsymbol{a}$, ($\Delta$ – *выражение , которое содержит переменную,* $-1 \leq a \leq 1$).  $\arcsin(-a) = -arcsina$	Выберите уравнение, которое имеет решение и выпиши ответ. 1) $\sin x = \frac{3}{4}$ 2) $\sin 5x = 1{,}2$ 3)$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = -0{,}9$ 4)$\sin\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{4}$ 5) $\sin 2x = 1{,}2 \cdot \frac{2}{3}$ 6) $\sin(x + 4) = \sqrt{2}$ 7) $\sin x = \frac{e}{2}$	Образец решения простейшего уравнения: 1) $\sin x = \frac{1}{2}$  $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in Z$ $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in Z$ 2) $\sin x = -\frac{2}{3}$  $x_1 = -arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$ $x_2 = -(\pi - arcsin\frac{2}{3}) + 2\pi n$, где $n \in Z$ Реши уравнения по образцу. 1) $\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	Реши уравнения: $2\sin x + 1 = 0$; $2\sin x = \cdots$ $\sin x = \cdots$ *См. задание 2* $5\sin x - 2 = 0$ $5\sin x = \cdots$ $\sin x = \cdots$ *Реши по образцу:* *1)* $3\sin x - 2 = 0$ *2)* $4\sin x + 2\sqrt{2} = 0$	Реши уравнения: $2\sin(2x) - 1 = 0$ $2\sin(2x) = \cdots$ $\sin(2x) = \cdots$ $2x_1 = \ldots$ $2x_2 = \ldots$ $x_1 = \ldots$ $x_2 = \ldots$ $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ $x - \frac{\pi}{3} = \cdots$ $x = \cdots + \frac{\pi}{3}$ $x = \cdots$ *Реши по образцу:* 1) $4\sin(\frac{x}{3}) + 2\sqrt{3} = 0$ 2) $\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{6}) = 1$

Карточка № 2

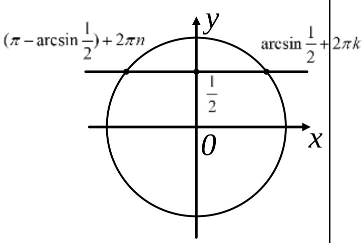
Теория	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
$\boldsymbol{Cos}\ \Delta = \boldsymbol{a}$, ($\Delta$ *−выражение, которое содержит переменную,* $-1 \le \mathrm{a} \le 1$).  $\arccos(-a) = arccosa$	Выберите уравнение, которое имеет решение и выпиши ответ. 1) $\cos x = \frac{5}{4}$ 2) $\cos 4x = 1{,}1$ 3) $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = -0{,}9$ 4) $\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{\pi}{4}$ 5) $\cos 2x = 1{,}5 \cdot \frac{2}{3}$ 6) $\cos(x + 6) = \sqrt{3}$ 7) $\cos 2x = \frac{e}{2}$	Образец решения простейшего уравнения: 1) $\cos x = \frac{1}{2}$  $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$ 2) $\cos x = -\frac{2}{3}$  $x_1 = \pi - arccos\frac{2}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$ $x_2 = -(\pi - arccos\frac{2}{3}) + 2\pi n$,где $n \in Z$ Реши уравнения по образцу.	Реши уравнения: $\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$; $\sqrt{2}\cos x = \cdots$ $\cos x = \cdots$ x=… *См. задание 2* $3\cos x - 1 = 0$ $3\cos x = \cdots$ $\cos x = \cdots$ $x = \ldots$ *Реши по образцу:* *1)* $5\cos x - 3 = 0$	Реши уравнения: $2\cos(2x) - \sqrt{2} = 0$ $2\cos(2x) = \cdots$ $\cos(2x) = \cdots$ $2x_1 = \ldots$ $2x_2 = \ldots$ $x_1 = \ldots$ $x_2 = \ldots$ $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -1$ $x - \frac{\pi}{4} = \cdots$ $x = \cdots + \frac{\pi}{4}$ $x = \cdots$ *Реши по образцу:* 1) $4\cos(\frac{x}{6})$ - $2\sqrt{3}$=0 2) $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

		1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	*2)* $4\cos x + 2\sqrt{3} = 0$	

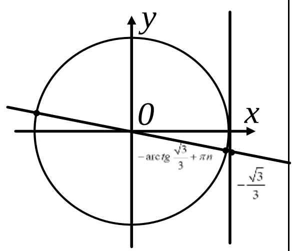
Карточка № 3

Теория	Задание 2	Задание 3	Задание 4
$\boldsymbol{tg}$ Δ= $\boldsymbol{a}$, (Δ −*выражение , которое содержит перемену, а – любое число*).  $\operatorname{arctg}(-a) = -arctga$	Образец решения простейшего уравнения: 1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$  x=$\frac{\pi}{3}+\pi n$, где $n \in Z$ 2) $\operatorname{tg} x = -2$  x=$-arctg2+\pi n$, где $n \in Z$ Реши уравнения по образцу. 1) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 2) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	Реши уравнения: $\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{2} = 0$; $\sqrt{2}\operatorname{tg} x = \cdots$ $\operatorname{tg} x = \cdots$ x=… *См. задание 2* $3\operatorname{tg} x - 3\sqrt{3} = 0$ $3\operatorname{tg} x = \cdots$ $\operatorname{tg} x = \cdots$ *x*=… *Реши по образцу:* *1)* $5\operatorname{tg} x - 10 = 0$ *2)* $4\operatorname{tg} x + 4 = 0$	Реши уравнения: $2\operatorname{tg}(2x) - 2\sqrt{3} = 0$ $2tg = \cdots$ $\operatorname{tg}(2x) = \cdots$ 2x=… x=… $\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{4}) = -1$ $x - \frac{\pi}{4} = \cdots$ $x = \cdots + \frac{\pi}{4}$ $x = \cdots$ *Реши по образцу:* 1) $4\operatorname{tg}(\frac{x}{6}) + 4\sqrt{3}=0$ 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4}) = 1$

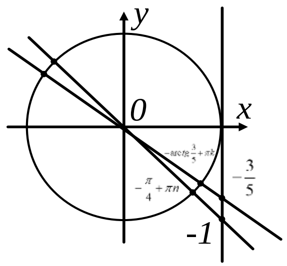
Карточка № 4

Теория	Задание 2	Задание 3	Задание 4
Уравнения, сводящиеся к квадратным. $asin^2\Delta + b\sin\Delta + c = 0$ Пусть $\sin\Delta = t$, $t \in [-1;1]$ $acos^2\Delta + b\cos\Delta + c = 0$ Пусть $\cos\Delta = t$, $t \in [-1;1]$ $atg^2\Delta + b\,\mathrm{tg}\,\Delta + c = 0$ Пусть $\mathrm{tg}\,\Delta = t$, t любое число. Реши квадратное уравнение $at^2+bt+c=0$ вернись к замене и реши простейшее тригонометрическое уравнение. Основное тригонометрическое тождество: $cos^2x + sin^2x = 1$	Образец решения. $2sin^2x + 3\sin x - 2 = 0$ Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1;1]$ $2t^2 + 3t - 2 = 0$ D=9+16=25 $\sqrt{D} = 5$ $t_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$ - не удовлетворяет условию $t \in [-1;1]$ 1) $\sin x = \frac{1}{2}$  $X_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in Z$ $X_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in Z$ Реши по образцу: 1) $5cos^2x + 2cosx - 3 = 0$ 2) $tg^2x + (\sqrt{3} + 1)tgx + \sqrt{3}=0$	Образец решения: $-2sin^2x + 5\cos x + 4 = 0$ Переходим к одной функции, применяя основное тригонометрическое тождество. $-2(1 - cos^2x) + 5cosx + 4 = 0$ Раскрой скобки и реши квадратное уравнение. Реши по образцу: 1) $5cos^2x + 4sinx - 4 = 0$ 2) $3cosx - 8sin^2x = 3$	Реши самостоятельно. 1) $5cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3sinx - 2 = 0$ 2) $5tg^2x + 8ctg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 = 0$

Карточка № 5

Теория	Задание 2	Задание 3	Задание 4
Однородные уравнения I степени. $asinx + bcosx = 0$:cosx,*где* $\cos x \neq 0$ $atgx + b = 0$ $tgx = -\frac{b}{a}$ $x = -artcg\left(\frac{b}{a}\right) + \pi n, n \in Z$	Выбери из предложенных однородные уравнения I степени: 1) $2sin^2 x + \cos x = 0$ 2) $3\sin x + 2\cos x = 6$ 3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ 4) $\sin 2x + 2\cos x = 0$ 5) $5\sin x + 120\cos x = 0$ 6) $2\cos x = \sqrt{3}\sin x$ Ответ: ____________________________________	Образец решения: 1) $\sqrt{3}sinx + cosx = 0$:cosx,*где* $\cos x \neq 0$ $\sqrt{3}tgx + 1 = 0$ $tgx = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  Х=$-\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in Z$ 2) $\sqrt{2}\cos x - 2\sin x = 0$: ……. $\sqrt{2} \ldots -2 \ldots = 0$ ……..	Реши самостоятельно. 1) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$ 2) $2\cos x - 2\sin x = 0$

Карточка № 6

Теория	Задание 2	Задание 3	Задание 4
Однородные уравнения II степени. $acos^2 x + b\sin x \cdot \cos x + csin^2 x = 0$ $:cos^2 x, \cos x \neq 0$ $atg^2 x + tgx + c = 0$ Пусть $\operatorname{tg} x = t$, t любое число. Реши квадратное уравнение $at^2+bt+c=0$ вернись к замене и реши простейшее тригонометрическое уравнение.	Выбери из предложенных однородные уравнения II степени: 1) $5sin^2 x + 7\cos x = 0$ 2) $2\sin^2 x - 5\cos^2 x = 4$ 3) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ 4) $\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$ 5) $5\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 4cos^2 x = 0$ 6) $2\sin^2 x - \sin x\cos x = 2$ Ответ: ______________________________	Образец решения: *1)* $5\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 3cos^2 x = 0$:cosx,*где* $\cos x \neq 0$ $5tg^2 x + 8\operatorname{tg} x + 3 = 0$ Пусть $\operatorname{tg} x = t$, t любое число. Решим квадратное уравнение $5t^2+8t+3=0$ $t_1=-1$, $t_2=-\frac{3}{5}$ tgx=-1 tgx=$-\frac{3}{5}$ x=$-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ x=-arctg$\frac{3}{5} + \pi n, n \in Z$  Реши по образцу: 2) $2cos^2 x - 3\cos x\sin x + sin^2 x = 0$ 2…-3tgx+…=0	Реши самостоятельно. 1) $4cos^2 x - 5\cos x\sin x + sin^2 x = 0$ 2) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x - cos^2 x = 0$ 3) $7cos^2 x - 7\cos x\sin x + 8sin^2 x = 4$ *4)* $5\cos x\sin x - 9sin^2 x + 4cos^2 x = 0$

2. Неравенства

Составители:

1. Мялковская Елена Николаевна , учитель математики МБОУ гимназии 40 г. Краснодара
2. Шакитько Олеся Ивановна, учитель математики, МОАНУ СОШ №17 им. К. В. Навальневой, г. Кореновск, МО Кореновский район
3. Чередниченко Инесса Викторовна, учитель математики, МОАНУ СОШ №17 им. К. В. Навальневой, г. Кореновск, МО Кореновский район
4. Омельченко Татьяна Васильевна учитель математики МАОУ СОШ № 1 имени В.Г.Серова г. Курганинск
5. Цепковская Елена Михайловна, учитель математики МБОУ СОШ 6, п. Южный, Белореченский район
6. Мельникова Ирина Михайловна, учитель математики МБОУ СОШ 5, г. Белореченск
7. Халанджян Алла Андрониковна, учитель математики, МОБУ СОШ№ 100 имени Героя Советского Союза Худякова Ивана Степановича, г. Сочи
8. Дубченко Марина Валентиновна учитель МАОУ СОШ 5 им. А. И. Пахайло, г. Курганинск
9. Кравченко Ирина Владимировна, учитель математики МБОУСОШ №5 г.Тимашевск,
10. Воеводина Ольга Александровна, учитель математики МБОУ СОШ №19 г.Тимашевск,
11. Васюк Людмила Александровна, главный специалист, МКУО ЦОКО г. Славянск-на-Кубани
12. Зиновьева Людмила Георгиевна, учитель математики, МОБУ гимназия 6 г. Сочи
13. Попова Ирина Николаевна, учитель математики, МБОУ СОШ № 6 им. Ю.А. Гагарина г. Кропоткин МО Кавказский район

2.1 Иррациональные неравенства

Определение Неравенство, содержащее неизвестную под знаком радикала, называется *иррациональным*.

Радикалы чётных степеней имеют ограничения по области определения и по области значений:

$$\sqrt[2n]{a} \geq 0 \text{ и } a \geq 0,$$

тогда как радикалы нечётных степеней не имеют таких ограничений.

Типы неравенств и методы их решений

1. $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ или $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

2. $f(x)\sqrt[2n]{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ или $f(x)\sqrt[2n]{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

3. $f(x)\sqrt[2n]{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$ или $f(x)\sqrt[2n]{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$

4. $\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^{2n}(x). \end{cases}$ или $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x). \end{cases}$

5. $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leq 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq g^{2n}(x). \end{cases} \end{array} \right.$ или $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x). \end{cases} \end{array} \right.$

6. $\sqrt[2n+1]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g^{2n+1}(x)$

Карточка №1

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{x-1}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt{(x+9)^2}<5-x$

б). $2\sqrt{(x-1)^2}\leq 4-x$

в). $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geq 2$

Карточка №2

1. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{-3+x}}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt{2+x}>1$

б). $\dfrac{x^2+2x-3}{x}>0$

в). $\dfrac{3}{\sqrt{2+x}}<\sqrt{2+x}+2$

Карточка №3

1. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x-16}{x+4}}}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt{x^2-5x+4}<2$

б). $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}<3$

в). $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}<\dfrac{3}{2}$

Карточка №4

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt{3x^2+7x-6}>0$

б). $\sqrt{2x-1}<x-2$

в). $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-1}$

Карточка №5

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{x^2-x-6}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt{x^2-x-6}>0$

б). $\sqrt{x^2-x+6}>6$

в). $x\sqrt{\left(x^2-x-2\right)x}\geq 0$

Карточка №6

1. Найти область определения функции $y=\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[3]{1+x}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt[3]{2x^2-7x+5}\leq 0$

б). $\sqrt{1+x}\leq\sqrt[4]{5-x}$

в). $1+x\leq\sqrt{5-x}$

Карточка №7

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt{\dfrac{1}{x}}<1$

б). $\sqrt{4x^2-3}<-2x-1$

в). $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}<0$

Карточка №8

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{2-\sqrt{x}}$

2. Решить неравенство:

а). $x+\sqrt{x}-2>0$

б). $\sqrt{2-x}<\sqrt{x+1}$

в). $\sqrt{2-\sqrt{x}}<\sqrt{x+1}$

Карточка №9

1. Найти область определения функции $y=\sqrt{(x+3)(x-6)}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt{x^2-2x-3}>1$

б). $\sqrt{x^2-49}>-2$

в). $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$

Карточка №10

1. Найти область определения функции $y=-8\sqrt{x-4}-\sqrt{x+2}$

2. Решить неравенство:

а). $\sqrt{x-1}>\sqrt{x+2}$

б). $\sqrt{x-4}>1-\sqrt{x+3}$

в). $\sqrt{x+3}-\sqrt{-x-1}<1+\sqrt{(x+3)(-x-1)}$

Ответы

Задание № / Карточка №	1	2
1	$\left[1;+\infty\right)$	*а).* $\left(-\infty;-2\right)$ *б).* $\left[1;2\right]$ *в).* $\left[1;+\infty\right)$
2	$\left(-2;+\infty\right)$	*а).* $\left(-1;+\infty\right)$ *б).* $\left(-3;0\right)\cup\left(1;+\infty\right)$ *в).* $\left(-1;+\infty\right)$
3	$\left(-\infty;-4\right)\cup\left(16;+\infty\right)$	*а).* $\left(0;5\right]\cup\left[12;+\infty\right)$ *б).* $\left[-1;5\right)$ *в).* $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$
4	$\left[1;+\infty\right)$	*а).* $\left(-\infty;-3\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ *б).* $\left[\frac{1}{2};1\right)\cup\left(5;+\infty\right)$ *в).* $\left[1;\frac{3}{2}\right)$
5	$\left(-\infty;-2\right]\cup\left[3;+\infty\right)$	*а).* $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$ *б).* $\left(-\infty;-5\right)\cup\left(6;+\infty\right)$ *в).* $\left[2;+\infty\right)$
6	$\left(-\infty;5\right]$	*а).* $\left[-1;\frac{5}{2}\right]$ *б).* $\left[-1;1\right]$ *в).* $\left(-\infty;1\right]$
7	$\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$	*а).* $\left(1;+\infty\right)$ *б).* $\left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ *в).* $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3};-1\right)$
8	$\left[0;4\right]$	*а).* $\left(1;+\infty\right)$

		б). $\left(\frac{1}{2};2\right]$ *в).* $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};4\right]$
9	$\left(-\infty;-3\right]\cup\left[6;+\infty\right)$	*а).* $\left(-\infty;1-\sqrt{5}\right)\cup\left(1+\sqrt{5};+\infty\right)$ *б).* $\left(-\infty;-7\right]\cup\left[7;+\infty\right)$ *в).* $\left(-\infty;-5\right]\cup\left[-\frac{4}{3};4\right)$
10	$\left[4;+\infty\right)$	*а).* $\varnothing$ *б).* $\left(13;+\infty\right)$ *в).* $\left[-3;2\sqrt{\sqrt{5}-2}-2\right)$

2.2 Показательные неравенства

Определение Неравенство, содержащее неизвестную в показателе степени, называется *показательным*.

Главная идея решения показательного неравенства сводится к приведению обеих его частей к степеням с одинаковым основанием,

$$a^{f(x)} \geq b^{g(x)} \Leftrightarrow c^{v(x)} \geq c^{u(x)}$$

после чего переходят к решению неравенства на показателях («опустив основания» степеней):

$$c^{v(x)} \geq c^{u(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x) \geq u(x), c > 1, \\ v(x) \leq u(x), 0 < c < 1. \end{cases}$$

(*по свойству монотонности показательной функции*).

Типы неравенств и методы их решений

1. $a^{f(x)} \geq b^{f(x)} \Leftrightarrow \dfrac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} \geq \left(\dfrac{a}{b}\right)^{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, при \dfrac{a}{b} > 1, \\ f(x) \leq 0, при 0 < \dfrac{a}{b} < 1. \end{cases}$

2. $a^{f(x)+n} + a^{f(x)+m} + \ldots + a^{f(x)+k} \geq b \Leftrightarrow a^{f(x)}\left(a^n + a^m + \ldots + a^k\right) \geq b$

Пусть $\left(a^n + a^m + \ldots + a^k\right) = \alpha$*), тогда*

$$a^{f(x)} \cdot \alpha \geq b \Leftrightarrow a^{f(x)} \geq \frac{b}{\alpha} \Leftrightarrow c^{v(x)} \geq c^{p} \Leftrightarrow \begin{cases} v(x) \geq p, c > 1, \\ v(x) \leq p, 0 < c < 1. \end{cases}$$

3. $A_0 \cdot a^{n \cdot f(x)} + A_1 \cdot a^{(n-1)\cdot f(x)} + \ldots + A_{n-1} \cdot a^{f(x)} + A_n \geq 0$ *(сводящееся к степенному).*

Пусть $a^{f(x)} = t$*, где* $t > 0$*, тогда получим:* $A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \cdot t + A_n \geq 0$**.** *Далее это неравенство решается как степенное с последующим возвратом к подстановке.*

4. $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} b^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A \cdot \frac{a^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} + B \cdot \frac{a^{f(x)} b^{f(x)}}{b^{2f(x)}} + C \cdot \frac{b^{2f(x)}}{b^{2f(x)}} \geq 0 \Leftrightarrow A \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + B \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + C \geq 0.$$

Пусть $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)} = t$*, где* $t > 0$*, тогда получим:* $A \cdot t^2 + B \cdot t + C \geq 0$*. Далее это неравенство решается как квадратное с последующим возвратом к подстановке.*

Карточка №1

Решить неравенство:

а). $5^{7x-4}<125$

б). $8^{2x+1}\geq 0{,}125^{x+2}$

в). $9\cdot 3^{x-1}+3^{x}<36$

г). $25^{x}+5^{x+1}+5^{1-x}+\frac{1}{25^{x}}\leq 12$

Карточка №2

Решить неравенство:

а). $6^{2x-1}<216$

б). $0{,}04^{2-x}<125^{x+1}$

в). $8\cdot 2^{x-1}-2^{x}>12$

г). $2^{x}+6\cdot 2^{-x}\leq 7$

Карточка №3

Решить неравенство:

а). $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}\geq\frac{1}{9}$

б). $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x}\geq 9^{2x-1}$

в). $2^{x+1}+0{,}5\cdot 2^{x}<5$

г). $2^{2x-1}-7\cdot 2^{x-1}+5\leq 0$

Карточка №4

Решить неравенство:

а). $\left(\frac{1}{7}\right)^{2-x}\geq\frac{1}{49}$

б). $100^{2x+1}\leq 0{,}1^{x+3}$

в). $3^{x-3}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x}>10$

г). $\frac{2}{5^{x}-1}+\frac{5^{x}-2}{5^{x}-3}\geq 2$

Карточка №5

Решить неравенство:

а). $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-5} < 1$

б). $\frac{1}{7} \le 7^{x-3} < 49$

в). $6^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2$

г). $2^{2x+4} - 16 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+1} + 16 \le 0$

Карточка №6

Решить неравенство:

а). $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} > 3$

б). $\frac{1}{8} < 2^{x-1} \le 16$

в). $5^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x > 2$

г). $25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \le 0$

Карточка №7

Решить неравенство:

а). $4^{3x-2} < 64$

б). $0,01 < 10^{x+2} \le 10000$

в). $4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \le 0$

г). $\frac{1}{3^{x-1}} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x+1}} < 52$

Карточка №8

Решить неравенство:

а). $5^{2x-1} > 625$

б). $0,5 < 2^{1-x} \le 32$

в). $4^x - 7\cdot 2^x + 10 \le 0$

г). $6^x - 4\cdot 3^x - 2^x + 4 \le 0$

Карточка №9

Решить неравенство:

а). $0,5^{x-3} \ge \dfrac{1}{4}$

б). $\dfrac{1}{6} < 6^{3-x} \le 36$

в). $9^x - 31\cdot 3^x + 108 \le 0$

г). $\dfrac{3-0,25^x}{2-2^{-x}} \ge 1,5$

Карточка №10

Решить неравенство:

а). $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-4x} \le \dfrac{1}{81}$

б). $\dfrac{1}{27} \le 3^{2-x} < 27$

в). $4^x \le 9\cdot 2^x + 22$

г). $25^{x^2-2x+10} - 0,2^{2x^2-4x-80} \le 0$

Ответы

Задание № / Карточка №	*а*	*б*	*в*	*г*
1	$(-\infty;1)$	$[-1;+\infty)$	$(-\infty;2]$	$\{0\}$
2	$(-\infty;2)$	$(-5;+\infty)$	$(2;+\infty)$	$[0;\log_2 6]$
3	$(-\infty;-2]$	$(-\infty;-4]$	$(-\infty;1)$	$[1;\log_2 5]$
4	$[0;+\infty)$	$(-\infty;-1]$	$(3;+\infty)$	$(0;\log_5 2]\cup(\log_5 3;1]$
5	$(2,5;+\infty)$	$[2;5)$	$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$[-3;3]$
6	$(1;+\infty)$	$(-2;5]$	$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;\log_{1,25} 2]$
7	$\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)$	$(-4;2]$	$[3;\log_2 21]$	$(-1-\log_3 4;+\infty)$
8	$(2,5;+\infty)$	$[-4;2)$	$[1;\log_2 5]$	$[0;2]$
9	$(-\infty;5]$	$[1;4)$	$[\log_3 4;3]$	$(-\infty;-1)\cup[-\log_2 1,5;+\infty)$
10	$(-\infty;-0,75]$	$(-1;5)$	$(-\infty;\log_2 11]$	$[-3;5]$

2.3 Логарифмические неравенства

Определение Неравенство, содержащее неизвестную в аргументе логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

$$\log_{g(x)} f(x) \geq a \quad \text{или} \quad \log_{g(x)} f(x) \geq \varphi(x)$$

Главная идея решения логарифмического неравенства сводится к уходу от логарифма по определению логарифма или посредством операции потенцирования.

1. По определению:

$$\log_{g(x)} f(x) \geq \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) \leq \left(g(x)\right)^{\varphi(x)}, \\ f(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) \geq \left(g(x)\right)^{\varphi(x)}. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (*)$$

2). Потенцированием:

$$\log_{g(x)} f(x) \geq \log_{g(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < g(x) < 1, \\ f(x) \leq \varphi(x), \\ f(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 1, \\ f(x) \geq \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (**)$$

**** Метод рационализации при решении логарифмических неравенств:***

$$\log_{g(x)} f(x) \geq \varphi(x) \overset{\text{на ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(g(x)-1\right)\left(f(x)-\left(g(x)\right)^{\varphi(x)}\right) \geq 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$$

<u>Типы неравенств и методы их решений</u>

1. $\log_a f(x) \ge c$ или $\log_a f(x) \le c$, где $a > 0, a \ne 1$

2. $\log_a f(x) \ge \varphi(x)$ или $\log_a f(x) \le \varphi(x)$, где $a > 0, a \ne 1$

3. $\log_{g(x)} f(x) \ge \varphi(x)$ или $\log_{g(x)} f(x) \le \varphi(x)$

4. $\log_a f(x) \ge \log_a \varphi(x)$ или $\log_a f(x) \le \log_a \varphi(x)$, где $a > 0, a \ne 1$

5. $\log_{g(x)} f(x) \ge \log_{g(x)} \varphi(x)$ или $\log_{g(x)} f(x) \le \log_{g(x)} \varphi(x)$

Типы 1-3 решаются по формуле (*), а типы 4-5 – по формуле (**)

6. $$\log_a f(x) + \log_a g(x) \ge \log_a \varphi(x) + \log_a \psi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)\cdot g(x) \le \varphi(x)\cdot\psi(x), 0 < a < 1, \\ f(x)\cdot g(x) \ge \varphi(x)\cdot\psi(x), a > 1, \end{array}\right. \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \psi(x) > 0. \end{cases}$$

7. $A_0 \cdot \log_a^n f(x) + A_1 \cdot \log_a^{n-1} f(x) + \ldots + A_{n-1} \cdot \log_a f(x) + A_n \ge 0$, где $a > 0, a \ne 1$.

Пусть $\log_a f(x) = t$*, тогда получим:* $A_0 \cdot t^n + A_1 \cdot t^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \cdot t + A_n \ge 0$. *Далее это неравенство решается как степенное с последующим возвратом к подстановке;* $f(x) > 0$.

8. $\log_a f(x) \cdot \log_b g(x) \ge 0$, или $\dfrac{\log_a f(x)}{\log_b g(x)} \ge 0$

$a > 0, a \ne 1$ и $b > 0, b \ne 1$ $\qquad$ $a > 0, a \ne 1$ и $b > 0, b \ne 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_a f(x) \ge 0, \\ \log_b g(x) \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \log_a f(x) \le 0, \\ \log_b g(x) \le 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_a f(x) \ge 0, \\ \log_b g(x) > 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \log_a f(x) \le 0, \\ \log_b g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Далее по формуле (*)

9. $\log_a f(x)\cdot\log_b g(x)\le 0$, или $\dfrac{\log_a f(x)}{\log_b g(x)}\le 0$

$a>0, a\ne 1$ и $b>0, b\ne 1$ $\quad$ $a>0, a\ne 1$ и $b>0, b\ne 1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_a f(x)\ge 0,\\ \log_b g(x)\le 0.\end{cases}\\ \begin{cases}\log_a f(x)\le 0,\\ \log_b g(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_a f(x)\ge 0,\\ \log_b g(x)< 0.\end{cases}\\ \begin{cases}\log_a f(x)\le 0,\\ \log_b g(x)> 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Далее по формуле (*)

Карточка №1

Решить неравенство:

а). $\log_3(x-1)+\log_3(x+5)<\log_3(5x+1)$

б). $\log_{\frac{1}{3}}(x+4)>\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x-2)$

в). $\log_2(2-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\sqrt{2}}3$

г). $\log_3\dfrac{1}{x}+\log_3(x^2+3x-9)\le\log_3(x^2+3x+\dfrac{1}{x}-10)$

Карточка №2

Решить неравенство:

а). $\log_{x^2}(3-2x)>1$

б). $\log_{x^2+3x}(x+3)<1$

в). $\log_{5-x}\dfrac{x+2}{(x-5)^4}\ge-4$

г). $2\log_{(x^2-8x+17)^2}(3x^2+5)\le\log_{x^2-8x+17}(2x^2+7x+5)$

Карточка №3

Решить неравенство:

а). $\lg^2 x-\lg x-2\le 0$

б). $\log_3^2 x+2>3\log_3 x$

в). $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2<11\log_2^2 x-22\log_2 x-24$

г). $\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0$

Карточка №4

Решить неравенство:

а). $\log_x(x-2)\cdot\log_x(x+2)\le 0$

б). $\left(\log_2(x+4,2)+2\right)\cdot\left(\log_2(x+4,2)-3\right)\ge 0$

в). $x\cdot\log_{x+3}(2x+7)\ge 0$

г). $\log_{x+1}(x-1)\cdot\log_{x+1}(x+2)\le 0$

Карточка №5

Решить неравенство:

а). $\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} 5 \geq \log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{19}}{6}} (7-2^x)$

б). $\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5-2^x)$

в). $1+\log_6(4-x) \leq \log_6(16-x^2)$

г). $\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\frac{x}{4}+2 \geq \log_2(x^2+3x-4)$

Карточка №6

Решить неравенство:

а). $\log_{6x^2-x-1}(2x^2-5x+3) \geq 0$

б). $\log_{x-3}(x^2-12x+36) \leq 0$

в). $\log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x) \leq 0$

г). $\log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leq -2$

Карточка №7

Решить неравенство:

а). $\log_{3x+1}(4x-6)+\log_{4x-6}(3x+1) \leq 2$

б). $\log_{2x} 0,25 \geq \log_2 32x - 1$

в). $\log_{2x-1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x-1) \leq 2$

г). $\frac{\log_{1-2x}((x+1)(1-4x+4x^2))}{\log_{x+1}(1-2x)} \leq -1$

Карточка №8

Решить неравенство:

а). $2^{\log_2 x} \le 56 - 6 \cdot x^{\log_2 2}$

б). $9^{\lg x} + x^{2\lg 3} \le \dfrac{2}{3}$

в). $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \ge 2\sqrt[4]{5}$

г). $2^{\log_5 x^2} + |x|^{\log_5 4} \le 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{0,2}(x+6)}$

Карточка №9

Решить неравенство:

а). $\log_{\frac{x}{2}}(4x^2 - 3x + 1) \ge 0$

б). $\log_{\frac{x}{2}}(3x^2 - 2x + 1) \ge 0$

в). $\dfrac{2x^2 + 9x + 7}{\log_3(x^2 + 6x + 9)} \ge 0$

г). $\dfrac{\log_4(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + \log_{0,25}(6x^2 - 12x - 9)}{x^2 - 2x - 8} \ge 0$

Карточка №10

Решить неравенство:

а). $\dfrac{2x^2 + 3x - 5}{\log_5(x^2 + 4x + 4)} \ge 0$

б). $\dfrac{(2x^2 - 15x + 28)\log_7(x - 3)}{x^2 - 11x + 30} \le 0$

в). $\dfrac{\log_7(49x^2) - 7}{\log_7^2 x - 4} \le 1$

г). $(3^{4x - x^2 - 1}) \cdot \log_{0,5}(x^2 - 4x + 5) \ge 0$

Ответы

Номер карточки	Ответ
1	*а).* $(1;3)$ *б).* $(-4;-3)\cup(2;+\infty)$ *в).* $(1;1{,}1)$ *г).* $[2;+\infty)$
2	*а).* $(-3;-1)$ *б).* $\left(0;\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\cup(1;+\infty)$ *в).* $[-1;4)$ *г).* $[0;4)\cup(4;7]$
3	*а).* $[0{,}1;100]$ *б).* $(0;3)\cup(9;+\infty)$ *в).* $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\cup(8;16)$ *г).* $(-1;0)\cup(3;4)$
4	*а).* $(2;3]$ *б).* $(-4{,}2;-3{,}95]\cup[3{,}8;+\infty)$ *в).* $(-3;-2)\cup[0;+\infty)$ *г).* $(1;2]$
5	*а).* $[1;\log_2 7)$ *б).* $[0;\log_2 5)$ *в).* $[2;4)$ *г).* $(1;17]$
6	*а).* $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)\cup[2;+\infty)$ *б).* $(3;4)\cup[5;6)\cup(6;7]$ *в).* $(-4;-3]\cup(3;4)$ *г).* $[\sqrt{6};+\infty)$

7	*а).* $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right)\cup\{7\}$ *б).* $\left[\frac{1}{8};\frac{1}{4}\right]\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ *в).* $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)\cup\{2\}$ *г).* $\{0,5\}$
8	*а).* $(0;27]$ *б).* $\left(0;\frac{\sqrt{10}}{10}\right]$ *в).* $\left(0;\frac{\sqrt{5}}{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$ *г).* $[-2;0)\cup(0;3]$
9	*а).* $\left(0;\frac{3}{4}\right]\cup(2;+\infty)$ *б).* $\left(0;\frac{2}{3}\right]\cup(3;+\infty)$ *в).* $(-\infty;4)\cup[-3,5;-3)\cup(-3;-2)\cup[-1;+\infty)$ *г).* $(-\infty;-2)\cup\{-1,3\}\cup(4;+\infty)$
10	*а).* $(-\infty;-3)\cup[-2,5;-2)\cup(-2;-1)\cup[1;+\infty)$ *б).* $(3;3,5]\cup\{4\}\cup(5;6)$ *в).* $\left(0;\frac{1}{49}\right)\cup\{7\}\cup(49;+\infty)$ *г).* $(-\infty;1]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$

2.4 Тригонометрические неравенства

<u>Определение</u> Неравенство, содержащее в себе тригонометрические функции (синусы, косинусы, тангенсы, котангенсы), называется *тригонометрическим.*

Любое тригонометрическое неравенство в процессе решения сводится к решению элементарного тригонометрического неравенства вида $\cos f(x) \vee a$ $\sin f(x) \vee a$, $\operatorname{tg} f(x) \vee a$ или $\operatorname{ctg} f(x) \vee a$.

<u>Решение элементарных тригонометрических неравенств</u>

$$\underline{\cos f(x) \vee a}$$

1). $$\cos f(x) > a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < f(x) < +\infty, a < -1, \\ -\arccos a + 2\pi n < f(x) < \arccos a + 2\pi n, n \in Z, -1 \le a < 1 \\ \varnothing, a \ge 1 \end{cases}$$

2). $$\cos f(x) \ge a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < f(x) < +\infty, a \le -1 \\ -\arccos a + 2\pi n \le f(x) \le \arccos a + 2\pi n, n \in Z, -1 < a < 1 \\ f(x) = 2\pi n, n \in Z, a = 1 \\ \varnothing, a > 1 \end{cases}$$

3). $$\cos f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} \varnothing, a \le -1 \\ \arccos a + 2\pi n < f(x) < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z, -1 < a \le 1 \\ -\infty < f(x) < +\infty \end{cases}$$

4). $$\cos f(x) \le a \Leftrightarrow \begin{cases} \varnothing, a < -1 \\ f(x) = -\pi + 2\pi n, n \in Z, a = -1 \\ \arccos a + 2\pi n \le f(x) \le 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n \in Z, -1 < a < 1 \\ -\infty < f(x) < +\infty \end{cases}$$

$$\underline{\sin f(x) \vee a}$$

1). $$\sin f(x) > a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < f(x) < +\infty, a < -1 \\ \arcsin a + 2\pi n < f(x) < \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z, -1 \le a < 1 \\ \varnothing, a \ge 1 \end{cases}$$

2). $\sin f(x) \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < f(x) < +\infty, a \leq -1 \\ \arcsin a + 2\pi n \leq f(x) \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z, -1 < a < 1 \\ f(x) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, a = 1 \\ \varnothing, a > 1 \end{cases}$

3). $\sin f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} \varnothing, a \leq -1 \\ -\pi - \arcsin a + 2\pi n < f(x) < \arcsin a + 2\pi n, n \in Z, -1 < a \leq 1 \\ -\infty < f(x) < +\infty, a > 1 \end{cases}$

4). $\sin f(x) \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} \varnothing, a < -1 \\ f(x) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, a = -1 \\ -\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq f(x) \leq \arcsin a + 2\pi n, n \in Z, -1 < a < 1 \\ -\infty < f(x) < +\infty, a \geq 1 \end{cases}$

$\underline{\operatorname{tg} f(x) \vee a}$

1). $\operatorname{tg} f(x) > a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n < f(x) < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

2). $\operatorname{tg} f(x) \geq a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n \leq f(x) < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

3). $\operatorname{tg} f(x) < a \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < f(x) < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$

4). $\operatorname{tg} f(x) \leq a \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < f(x) \leq \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$

$\underline{\operatorname{ctg} f(x) \vee a}$

1). $\operatorname{ctg} f(x) > a \Leftrightarrow \pi n < f(x) < \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

2). $\operatorname{ctg} f(x) \geq a \Leftrightarrow \pi n < f(x) \leq \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

3). $\operatorname{ctg} f(x) < a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi n < f(x) < \pi + \pi n, n \in Z$

4). $\operatorname{ctg} f(x) \leq a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi n \leq f(x) < \pi + \pi n, n \in Z$

Карточка №1

Решить неравенство:

а). $\cos x > \frac{1}{2}$

б). $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

в). $2\sin^2 x > \sin x + 1$

г). $6\cos^2 x + \sin x > 4$

Карточка №2

Решить неравенство:

а). $\cos x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

б). $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

в). $6\cos^2 x + 1 \ge 5\cos x$

г). $6\sin^2 x + \cos x \le 4$

Карточка №3

Решить неравенство:

а). $\sin x > \frac{1}{2}$ *, если* $\cos x \ge 0$

б). $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ *на промежутке* $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

в). $\sin x \cdot \sqrt{x} > 0$

г). $\sin x \cdot \sqrt{4 - x^2} \le 0$

Карточка №4

Решить неравенство:

а). $\cos x < 0$

б). $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, *если* $\sin x > \frac{1}{2}$

в). $\cos x \cdot \sqrt{x} \ge 0$

г). $\cos x \cdot \sqrt{x + 2 - x^2} \ge 0$

Карточка №5

Решить неравенство:

а). $\operatorname{tg} x \ge 1$

б). $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \le 0$

в). $\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x} > 0$

г). $\sin^2 x - 6\sin x \cos x + 5\cos^2 x > 0$ *на промежутке* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Карточка №6

Решить неравенство:

а). $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

б). $\operatorname{tg} 2x < 0$

в). $\frac{(\sin x - \frac{1}{2})(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2})}{\sin x} > 0$

г). $2 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x < 0$

Карточка №7

Решить неравенство:

а). $\sin x > \frac{1}{2}$

б). $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

в). $2\sin x\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

г). $\sqrt{3}(\cos x)^{-2} < 4\mathrm{tg}\, x$

Карточка №8

Решить неравенство:

а). $\sin x \leq 1$

б). $\mathrm{tg}\, x < 1$

в). $\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2} > 1$

г). $\sin 4x + \cos 4x\,\mathrm{ctg}\, 2x > 1$

Карточка №9

Решить неравенство:

а). $(\cos x + \frac{1}{2})(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}) < 0$

б). $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} > 0$

в). $\frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sin x} \geq 0$

г). $3^{\frac{2\cos^2 x - 6}{2\cos^2 x - 1}} > 3^{\frac{\cos x}{1 - 2\cos^2 x}}$

Карточка №10

Решить неравенство:

а). $2^{\cos x} > 2^{\frac{1}{2}}$

б). $0,3^{\cos^2 x} \geq 0,3^{\sin^2 x}$

в). $(\sqrt{2})^{4\sin x\cos x} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

г). $0,2^{\cos 2x} - 25^{\frac{1}{\cos^2 x}} < 4\cdot 125^{-\frac{1}{2}}$

Ответы

Номер карточки	Ответ
1	*а).* $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),n\in Z$ *б).* $\left[-\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right],n\in Z$ *в).* $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),n\in Z$ *г).* $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right),n\in Z$
2	*а).* $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right],n\in Z$ *б).* $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right),n\in Z$ *в).* $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;2\pi-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right],n\in Z$ *г).* $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[-\arccos\frac{2}{3}+2\pi n;\arccos\frac{2}{3}+2\pi n\right],n\in Z$
3	*а).* $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right],n\in Z$ *б).* $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$ *в).* $(2\pi n;\pi+2\pi n),n\in Z\cup\{0\}$ *г).* $[-2;0]\cup\{2\}$
4	*а).* $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right),n\in Z$ *б).* $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),n\in Z$ *в).* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\frac{5\pi}{2}+2\pi n\right],n\in Z$

	г). $\left[-1;\frac{\pi}{2}\right]\cup\{2\}$
5	*а).* $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$ *б).* $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right], n\in Z$ *в).* $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$ *г).* $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\operatorname{arctg}5;\frac{\pi}{2}\right), n\in Z$
6	*а).* $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$ *б).* $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi n}{2}\right), n\in Z$ *в).* $\left(2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$ *г).* $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi n\right), n\in Z$
7	*а).* $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$ *б).* $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right), n\in Z$ *в).* $\left(\frac{3\pi}{8}+\pi n;\frac{9\pi}{8}+\pi n\right), n\in Z$ *г).* $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right), n\in Z$
8	*а).* $(-\infty;+\infty)$ *б).* $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in Z$ *в).* $\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$ *г).* $\left(\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right), n\in Z$
9	*а).* $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z$

	б). $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right), n\in Z$ *в).* $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}, n\in Z$ *г).* $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$
10	*а).* $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), n\in Z$ *б).* $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right], n\in Z$ *в).* $\left(\frac{7\pi}{12}+\pi n;\frac{11\pi}{12}+\pi n\right), n\in Z$ *г).* $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right), n\in Z$

3. Математические модели

Составители:

1. Любченко Лариса Александровна, учитель математики МАОУ СОШ №18 с УИОП, г. Армавира.
2. Самедова Инна Сабировна, учитель математики МБОУ гимназии №1 г. Армавира.
3. Шнейдер С.Н., учитель математики МБОУ СОШ №29 имени К.Ф. Зайцева пос. Мостовского Мостовского района,
4. Соколян Т.В., учитель математики МБОУ СОШ №3 МО Староминского района,
5. Ткаченко Л.В. учитель математики МБОУ СОШ №2 имени Л.Н. Плаксина пос. Мостовского Мостовского района
6. Гасюк Ирина Владимировна, учитель математики МБОУ СОШ №6 г.Крымск, Крымский район
7. Петренко Наталья Викторовна, учитель математики, МБОУ СОШ №7, ст. Воронежская, Усть-Лабинский район
8. Николаева Лариса Всеволодовна, учитель математики, МБОУ СОШ №8, п.Двубратский, Усть-Лабинский район
9. Бельчикова Наталия Владимировна МБОУ ООШ №23 х. Красного, Крымский район
10. Наумова Надежда Андреевна, учитель математики, МБОУСОШ №18. Апшеронский район
11. Грязнова Галина Петровна, учитель математики,МБОУСОШ №20, Апшеронский район
12. Падалка Елена Алексеевна учитель математики МБОУ СОШ №1 г. Крымск Крымского района,
13. Клепань Людмила Ивановна, учитель математики МБОУ СОШ 3 им. Н.И.Дейнега ст.Павловской
14. Пшеничная Любовь Александровна, учитель математики, МБОУ СОШ 10 им А.А. Забары ст Павловской

3.1 Задачи на смеси и сплавы

I

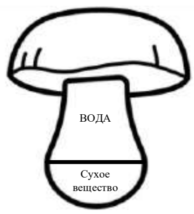
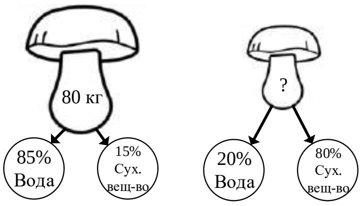
Теория, алгоритмы	Задача
Масса раствора (смеси, сплава) равна сумме масс всех составляющих.	1. В 440 г воды растворили 60 г соли. Какова масса полученного раствора?
$Концентрация = \dfrac{соль}{весь\ растрор} \cdot 100\%$	2. В 440 г воды растворили 60 г соли. Какова концентрация полученного раствора?
1. Найти новую массу всего раствора *2.* $Концентрация = \dfrac{соль}{весь\ растрор} \cdot 100\%$	3. В 440 г воды растворили 60 г соли. Через некоторое время 200 г воды испарилось. Какое теперь стало процентное содержание соли в растворе?
При смешивании нескольких растворов (смесей, сплавов) масса нового раствора становится равной сумме всех смешанных растворов.	4. Сколько граммов воды надо добавить к 300г раствора, содержащего 20% соли, чтобы получить 15%-й раствор?

Ответы:

1. 500 г., **2.** 12%, **3.** 20%, **4.** 100 г.

II

При решении этих задач надо помнить, что все тела, вещества, продукты содержат в себе воду, которая частично испаряется. Поэтому при решении этих задач мы каждый раз разделяем данное нам вещество на воду и «сухой остаток» (сухое вещество), масса которого не меняется в условиях задачи.

Теория	Задача
	1. Свежие грибы содержат 90% воды. Сколько процентов составляет сухой остаток в этом веществе?
$\begin{matrix}\text{Сухое}\\ \text{вещество}\end{matrix} = \text{Общая масса} \cdot \dfrac{\begin{matrix}\text{\% содержания}\\ \text{сухого вещества}\end{matrix}}{100}$	2. Собрали 80 кг свежих грибов с содержанием воды 90%. Сколько килограммов сухого вещества содержится в свежих грибах?
1. **Масса (кг)** сухого вещества одинакова и в свежих и в высушенных грибах. 	3. Собрали 80 кг свежих грибов, влажность которых 85%. После того как грибы высушили, их влажность составила 20%. Чему равна масса грибов после сушки?
	4. Свежие грибы содержат 80% воды, а сушеные 10%. Сколько надо взять свежих грибов, чтобы получить 6 кг сушеных?
2. Обозначаем за неизвестную, то что нужно найти и составляем пропорцию.	5. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

Самостоятельное решение:

6. Только что собранные грибы содержит 92% воды, а после двухнедельного пребывания на воздухе они содержат 80% воды. На сколько килограммов уменьшится масса 100 кг грибов, после того, как они две недели пролежат на воздухе?

Ответы:

1. 10% **2.** 8 кг **3.** 15 кг **4.** 27 кг **5.** 90% **6.** 60%

III

Введем обозначения:

c₁- массовая доля растворенного вещества в первом растворе;

c₂- массовая доля растворенного вещества во втором растворе;

c- массовая доля растворенного вещества в новом растворе, полученном при смешивании первого и второго растворов;

m_1, m_2, m - массы соответствующих растворов.

Теория	Задача
Масса вещества это произведение концентрации (выраженной десятичной дробью) на массу раствора.	1. Сколько соли содержится в 10 кг 30% раствора кислоты?
$C = \dfrac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}$	2. Какой концентрации получится раствор если смешать 10 кг 30% раствора кислоты с 10 кг воды?
$C = \dfrac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}$	3. Смешали одинаковое количество 30% и 60% растворы кислот, какой концентрации получится новый раствор
При смешивании нескольких растворов (смесей, сплавов) масса нового раствора становится равной сумме всех смешанных растворов.	4. Смешали равное количество 30% и 60% растворы кислот и добавили 10кг воды. Получился 40% раствор кислоты. Какова масса 30% раствора кислоты?

Самостоятельное решение:

5. Смешали 30% и 60% растворы кислот и добавили 10кг чистой воды, получили 36% раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50% кислоты, то получили бы 41% раствор кислоты. Сколько килограмм 30% раствора использовали для получения смеси?

Ответы:

1. 3 кг. **2.** 15% **3.** 45% **4.** 40 кг **5.** 60 кг

IV

Введем обозначения:

c_1**-** массовая доля растворенного вещества в первом растворе;

c_2**-** массовая доля растворенного вещества во втором растворе;

c**-** массовая доля растворенного вещества в новом растворе, полученном при смешивании первого и второго растворов;

m_1, m_2, m - массы соответствующих растворов.

Теория	Задача
Масса вещества это произведение концентрации(выраженной десятичной дробью)на массу раствора.	1. Сколько килограммов цинка содержится в сплаве 10% цинка массой 20 кг
$C = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}$	2. Каково процентное содержание цинка в новом сплаве, который получили при сплавлении сплавов 10% и 40% сплавов по 8кг и 2 кг соответственно.
$m_1 = \frac{m_2(c_2 - c)}{c - c_1}$	3. Один сплав содержит 20% цинка, а второй — 70%. Сколько килограммов первого и второго сплавов нужно взять, чтобы получить 100 кг 50%-го цинкового сплава?
	4. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25%никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Самостоятельное решение:

5. Масса первого сплава на 3 кг больше массы второго сплава. Первый сплав содержит 10% цинка, второй 40% цинка. Новый сплав, полученный из двух первоначальных содержит 20% цинка. Определить массу нового сплава.

Ответы:

1. 2 кг **2.** 16% **3.** 20% - 40 кг, 70%- 60 кг **4.** 100 кг **5.** 9 кг

V

Введем обозначения:

m_0 –начальная масса соли;
m_1 – масса соли после первого переливания;
m_2 – масса соли после второго переливания;
c_0- концентрация раствора;
c_1- концентрация после первого переливания;
c_2- концентрация после второго переливания;
m-масса раствора

Теория	Задача
$m_0 = 0,01 \cdot c_0 \cdot m$	1. В сосуде содержится 10 кг 20%-го раствора соли. Найти массу соли в данном растворе.
$m_1 = m_0 - 0,01 \cdot c_0 \cdot 2$	2. В сосуде содержится 10 кг 20%-го раствора соли, из сосуда вылили 2 кг раствора и долили 2 кг воды. Какова масса соли в получившемся растворе?
$c_1 = \frac{m_1}{m} \cdot 100\%$	3. В сосуде содержится 10 кг 20%-го раствора соли, из сосуда вылили 2 кг раствора и долили 2 кг воды. Какова концентрация соли в получившемся растворе?
$m_2 = m_1 - 0,01 \cdot c_1 \cdot 2$	4. В сосуде содержится 10 кг 20%-го раствора соли, из сосуда вылили 2 *кг* раствора и долили 2 кг воды после чего раствор перемешали. Эту процедуру повторили еще один раз. Какова масса соли в получившемся растворе?

Ответы:

1. 2 кг **2.** 1,6 кг **3.** 16% **4.** 1,28 кг

VI

Теория	Задача
$c=\frac{m_1}{m}\cdot 100\%$	1. В сплаве олова 9 кг и меди 11 кг. Каково процентное содержание меди в сплаве?
$m=\frac{m_1}{0,01c}$	2. В сплаве 11 кг меди и некоторое количество олова. Содержание меди в сплаве 55%. Найдите массу сплава.
$c=\frac{m_1}{m}\cdot 100\%$	3. В сплав, состоящий из 11 кг меди и 9 кг олова, добавили 5 кг олова. Каково процентное содержание олова в сплаве?
	4. В сплав меди и олова, состоящий из 11 кг меди добавили 9 кг олова. Получили сплав, содержащий 50% олова. Какова масса первоначального сплава?

Самостоятельное решение:

5. В сплаве олова и меди содержалось 11 кг меди. После того как в сплав добавили 7,5 кг олова, концентрация олова повысилось на 33%. Какова первоначальная масса сплава?

Ответы:

1. 55% **2.** 20 кг **3.** 56% **4** 13 кг **5.** 12,5 кг

VII

Теория	Задача
Чтобы найти массу сухого вещества в предлагаемом в задаче продукте надо процент сухого вещества разделить на 100 и умножить на массу всего продукта.	1. Свежие грибы содержат 70% воды. Сколько процентов составляет сухой остаток в этом веществе?
	2. Собрали 90кг свежих грибов с содержанием воды 90%.Сколько килограммов сухого вещества содержится в свежих грибах?
	3. Собрали 80 кг свежих грибов, влажность которых 85%. После того как грибы высушили, их влажность составила 20%. Чему равна масса грибов после сушки?
	4. Свежие грибы содержат 80% воды, а сушеные 10%. Сколько надо взять свежих грибов, чтобы получить 6 кг сушеных?
	5. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

Самостоятельное решение:

5. В свежих грибах 70% влаги, а в сушеных 10%. Сколько килограммов свежих грибов надо собрать для того, чтобы получить 30 кг сушеных? (Ответ: 90 кг)

Ответы:

1. 30% **2.** 9 кг **3.** 15 кг **4.** 27 кг **5.** 90% **6.** 90 кг

VIII

A-начальная масса

a- масса, которую отливают

Теория	Задача
$m_1 = (A-a)$	1. Из сосуда, наполненного 20 л спирта, отливают 1 л спирта и наливают 1 л воды. Сколько спирта останется в сосуде?
$m_2 = \dfrac{(A-a)^2}{A}$	2. Из сосуда, наполненного 20 л спирта, отливают 1 л спирта и наливают 1 л воды. После перемешивания отливают 1л смеси и наливают 1 л воды. Сколько литров спирта останется а сосуде?
$m_3 = \dfrac{(A-a)^3}{A^2}$	3. Из сосуда, наполненного 20 л спирта, отливают 1 л спирта и наливают 1 л воды. После перемешивания отливают 1л смеси и наливают 1 л воды, так три раза. Сколько литров спирта останется а сосуде?
$m_5 = \dfrac{(A-a)^5}{A^4}$	4. Из сосуда, наполненного 20 л спирта, отливают 1 л спирта и наливают 1 л воды. После перемешивания отливают 1л смеси и наливают 1 л воды, так пять раз. Сколько литров спирта останется а сосуде?

Самостоятельное решение:

5. Из сосуда, наполненного 20 л спирта, отливают 1 л спирта и наливают 1 л воды. После перемешивания отливают 1л смеси и наливают 1 л воды, так поступают 10 раз. Сколько спирта останется в сосуде после десяти отливаний? (Ответ:7,17 л)

Ответы:

1. 19 л**2.** 18,05 л **3.** 17,1475 л **4.** 15,48 л **5.** 7,17 л

3.2 Задачи экономического содержания

Задание 1. Максим хочет взять кредит 1,5 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

Теория	Задача	Ответ
$b = 1 + 0,01r$ Sb	31 декабря 2018 года Максим взял кредит 1,5 млн. рублей сроком на один год. Процентная ставка 10% годовых. Какую сумму должен возвратить Максим банку через год?	1,65 млн. руб.
$Sb - x$	31 декабря 2018 года Максим взял кредит 1,5 млн. рублей сроком на два года. Процентная ставка 10% годовых. После первого начисления процентов Максим перевёл в банк 350000 рублей. Какова сумма второго платежа?	1,43 млн. руб.
$(Sb - x)b - x$	31 декабря 2018 года Максим взял кредит 1,5 млн. рублей сроком на три года. Процентная ставка 10% годовых. Максим планирует в течении двух лет выплачивать банку по 350000 рублей. Каков долг будет банку после второй выплаты?	1,08 млн. руб.
$((Sb - x)b - x)b$	31 декабря 2018 года Максим взял кредит 1,5 млн. рублей сроком на три года. Процентная ставка 10% годовых. Максим планирует в течении двух лет выплачивать банку по 350000 рублей. Каков будет третий платёж банку?	1,188 млн. руб.
	Максим хочет взять кредит 1,5 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?	6 лет

Задние 2. По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Теория	Задача	Ответ
$b=1+0,01r$ Sb^3	По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года. Какова сумма вклада за три года?	$1,331S$
Sb^2	По вкладу «Б» банк увеличивает сумму на 11% в течение каждого из двух лет. Какова сумма вклада «Б» через два года?	$1,2321S$
$Sb^2\cdot(1+0,01r)$	По вкладу «Б» банк увеличивает сумму на 11% в течение каждого из двух лет и на n% за третий год. Какова сумма вклада «Б» через три года?	$1,331S\cdot(1+0.01n)$
$Sb^2\cdot(1+0,01r)>Sb^3$	По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» увеличивает на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».	9%

Задание 3. 31 декабря 2018 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает

долг на 20%), затем Василий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Василий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Теория	Задача	Ответ
$b=1+0{,}01r$ Sb	31 декабря 2018 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Какую сумму должен банку Василий после первого начисления процентов?	6 552 000 руб.
$Sb-x$	31 декабря 2018 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Какую сумму должен банку Василий после перевода первой ежегодной выплаты?	(6 552 000 - х) руб.
$(Sb-x)в$	31 декабря 2018 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Какую сумму должен банку Василий после второго начисления процентов?	(7 862 400 - 1,2х) руб.
$(Sb-x)b-x$	31 декабря 2018 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Какую сумму должен банку Василий после перевода второй ежегодной выплаты?	(7 862 400 - 2,2х) руб.
$((Sb-x)b-x)b$	31 декабря 2018 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Какую сумму должен банку Василий после третьего начисления процентов?	(9 434 880 – 2,64х) руб.
$((Sb-x)b-x)b-x=0$	31 декабря 2018 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Василий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Василий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?	2 592 2000 руб.

Задание 4. У фермера есть два поля, каждая площадью 20 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими куль турами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором-300 ц/га Урожайность свеклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором - 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Теория	Задача	Ответ
$Д = S \cdot У \cdot Ц$, $Д$ - доход, *руб.* S - площадь, <u>*га.*</u> $У$ - урожайность, *ц/га*. $Ц$ - цена, *руб*. за центнер.	На поле площадью 20 га. фермер решил вырастить свёклу. Урожайность свеклы составляет 250 ц/га. Фермер может продавать свёклу по цене 2500 руб. за центнер. Какой доход получить фермер?	12 500 000 руб.
$Д = S \cdot У \cdot Ц$	На поле площадью 20 га. фермер решил вырастить картофель. Урожайность картофеля составляет 450 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер. Какой доход получить фермер?	18 000 000 руб.
$Д = S \cdot У \cdot Ц$	На фермерском поле площадью 20 га. можно вырастить свёклу и картофель. Поле можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля составляет 300 ц/га., а свёклы – 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?	20 000 000 руб.
$Д = S \cdot У \cdot Ц$	У фермера есть два поля, каждая площадью 20 га. На каждом поле можно выращивать картофель. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором-300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер. С какого поля наибольший доход может получить фермер?	18 000 000 руб.
	У фермера есть два поля, каждая площадью 20 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими куль турами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором-300 ц/га Урожайность свеклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором - 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?	38 000 000 руб.

Задание 5. Накануне Нового года некий предприниматель заказал из Бразилии 12 тонн ананасов по цене 20 000 руб. за тонну. В Бразилии к отправке подготовили 12 тонн, при этом было определено, что процентное содержание жидкости в товаре составляет 98%. При разгрузке предприниматель выяснил, что доля жидкости уменьшилась до 94% за счет усушки при

транспортировке. По какой цене за тонну предприниматель должен продать ананасы, чтобы чистая прибыль составила 300%?

Теория	Задача	Ответ
$1\% = \frac{1}{100}$. Найти $p\%$ от числа и число по его проценту.	Накануне Нового года некий предприниматель заказал из Бразилии 12 тонн ананасов. В Бразилии к отправке подготовили 12 тонн, при этом было определено, что процентное содержание жидкости в товаре составляет 98%. При разгрузке предприниматель выяснил, что доля жидкости уменьшилась до 94% за счет усушки при транспортировке. Сколько тонн ананасов он разгрузил?	4 тонны
Подсказка: задачу решать относительно «сухого» вещества.	Накануне Нового года некий предприниматель заказал из Бразилии 12 тонн ананасов по цене 20 000 руб. за тонну. В Бразилии к отправке подготовили 12 тонн, при этом было определено, что процентное содержание жидкости в товаре составляет 98%. При разгрузке предприниматель выяснил, что доля жидкости уменьшилась до 94% за счет усушки при транспортировке и увеличил цену ананасов в два раза. Чему равен убыток предпринимателя?	80 000 руб.
	Накануне Нового года некий предприниматель заказал из Бразилии 12 тонн ананасов по цене 20 000 руб. за тонну. В Бразилии к отправке подготовили 12 тонн, при этом было определено, что процентное содержание жидкости в товаре составляет 98%. При разгрузке предприниматель выяснил, что доля жидкости уменьшилась до 94% за счет усушки при транспортировке. Во сколько раз предпринимателю надо увеличить цену ананасов, чтобы вернуть свои деньги?	В три раза
	Накануне Нового года некий предприниматель заказал из Бразилии 12 тонн ананасов по цене 20 000 руб. за тонну. В Бразилии к отправке подготовили 12 тонн, при этом было определено, что процентное содержание жидкости в товаре составляет 98%. При разгрузке предприниматель выяснил, что доля жидкости уменьшилась до 94% за счет усушки при транспортировке. По какой цене за тонну предприниматель должен продать ананасы, чтобы чистая прибыль составила 300%?	240 000 руб.

Задание 6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего гола.
На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,2 млн. рублей?

<table>
<tr><th>Теория</th><th>Задача</th><th>Ответ</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>№ платежа</th><th>Долг банку (в млн. руб.)</th><th>Выплата по процентам (в млн. руб.)</th><th>Выплата основного долга (в млн. руб.)</th><th>Остаток (в млн. руб.)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>S</td><td>$0,01r\cdot S$</td><td>$\frac{S}{2}$</td><td>$S-\frac{S}{2}=\frac{S}{2}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{S}{2}$</td><td>$0,01r\cdot\frac{S}{2}$</td><td>$\frac{S}{2}$</td><td>$\frac{S}{2}-\frac{S}{2}=0$</td></tr>
</table>
</td><td>В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн. рублей на два года. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего гола. Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?</td><td>130%</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>№ платежа</th><th>Долг банку (в млн. руб.)</th><th>Выплата по процентам (в млн. руб.)</th><th>Выплата основного долга (в млн. руб.)</th><th>Остаток (в млн. руб.)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>S</td><td>$0,01r\cdot S$</td><td>$\frac{S}{4}$</td><td>$\frac{3S}{4}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{3S}{4}$</td><td>$0,01r\cdot\frac{3S}{4}$</td><td>$\frac{S}{4}$</td><td>$\frac{2S}{4}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{2S}{4}$</td><td>$0,01r\cdot\frac{2S}{4}$</td><td>$\frac{S}{4}$</td><td>$\frac{S}{4}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{S}{4}$</td><td>$0,01r\cdot\frac{S}{4}$</td><td>$\frac{S}{4}$</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн. рублей на четыре года. Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего гола.
Определить наибольший годовой платёж по кредиту?</td><td>3,6 млн.руб.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><th>№ платежа</th><th>Долг банку (в млн. руб.)</th><th>Выплата по процентам (в млн. руб.)</th><th>Выплата основного долга (в млн. руб.)</th><th>Остаток (в млн. руб.)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>S</td><td>$0,01r\cdot S$</td><td>$\frac{S}{5}$</td><td>$\frac{4S}{5}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{4S}{5}$</td><td>$0,01r\cdot\frac{4S}{5}$</td><td>$\frac{S}{5}$</td><td>$\frac{3S}{5}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{3S}{5}$</td><td>$0,01r\cdot\frac{3S}{5}$</td><td>$\frac{S}{5}$</td><td>$\frac{2S}{5}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{2S}{5}$</td><td>$0,01r\cdot\frac{2S}{5}$</td><td>$\frac{S}{5}$</td><td>$\frac{S}{5}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\frac{S}{5}$</td><td>$0,01r\cdot\frac{S}{5}$</td><td>$\frac{S}{5}$</td><td>0</td></tr>
</table>
</td>
<td>В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн. рублей на пять лет. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего гола.
На сколько рублей общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, больше суммы кредита?</td>
<td>4,8 млн.руб.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн. рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего гола.
На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,2 млн. рублей?</td>
<td>10 лет</td>
</tr>
</table>

Задание 7. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвертый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 125 миллионов, а за четыре года станут больше 200 миллионов рублей.

Теория	Задача	Ответ
$b=1+0,01r$ $S\cdot b^4$	По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Сколько миллионов рублей вложено в проект за четыре года, если размер первоначальных вложений 57 миллионов рублей?	118,1952 млн. руб.
$(((S\cdot b+S_1)\cdot b+S_1)\cdot b+S_1)\cdot b+S_1$	По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения по 10 миллионов каждый год. Сколько миллионов рублей вложено в проект за четыре года, если размер первоначальных вложений 57 миллионов рублей?	171,8752 млн. руб.
$(((S\cdot b+S_1)\cdot b+S_1)\cdot b+S_2)\cdot b+S_2$	. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвертый годы. Сколько миллионов рублей вложено в проект за четыре года	203,5552 млн. руб.

$\left(\left(\left(S \cdot b+S_1\right) \cdot b+S_1\right) \cdot b+S_2\right) \cdot b+S_2>200$	По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвертый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за четыре года станут больше 200 миллионов рублей.	56 млн. руб.
	По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвертый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 125 миллионов, а за четыре года станут больше 200 миллионов рублей.	57 млн. руб.

3.3 Задачи на совместную работу

Задача 1

Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

<table>
<tr><td colspan="3">Комментарии</td></tr>
<tr><td colspan="3">Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением
$p = \frac{1}{t}$.
Рассмотрим стандартную схему решения задач этого типа.
Пусть x – время выполнения некоторой работы первым рабочим,
y – время выполнения этой же работы вторым рабочим.</td></tr>
<tr><td>Условие</td><td>Наводящие вопросы</td><td>Решение</td></tr>
<tr><td>Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая.</td><td>1)Найдите производительность каждой трубы;
2) Найдите их совместную производительность.</td><td>1) $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}$ – производительность каждой трубы
2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ – совместная производительность.</td></tr>
<tr><td>Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая.</td><td>Составьте математическую модель данной ситуации.</td><td>Решение: пусть за x часов наполняет резервуар первая труба, а за y часов – вторая труба. Получим уравнение:
$x - y = 6$</td></tr>
<tr><td>Обе трубы наполняют этот же резервуар за 4 минуты.</td><td>Составьте математическую модель по данной ситуации.</td><td>Решение: пусть за x часов наполняет резервуар первая труба, а за у часов – вторая труба. Получим уравнение:
$\left(\frac{1}{\mathrm{x}} + \frac{1}{y}\right) \cdot 4 = 1$</td></tr>
<tr><td>Первая труба наполняет резервуар на 6 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же</td><td>Составим и решим систему уравнений
Надо ли найти время, за которое вторая труба заполнит резервуар?</td><td>$\begin{cases} x - y = 6 \\ \left(\frac{1}{\mathrm{x}} + \frac{1}{y}\right) \cdot 4 = 1 \end{cases}$</td></tr>
</table>

резервуар за 4 минуты. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?	(Нет, надо найти время, за которое наполняет резервуар первая труба. Поэтому в первом уравнении выводим переменную х)	$\begin{cases} x = 6 + y \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 4 = 1 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{6+y} + \frac{1}{y}\right) \cdot 4 = 1$ Решим полученное уравнение, получим у = 6 или у = -4 – не удовлетворяет условию задачи. Ответ: 6

Задачи для самостоятельного решения

1. Первая труба наполняет резервуар на 27 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 18 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

(Ответ 27)

2. Первый рабочий делает заказ на 48 минут дольше, чем второй. Оба рабочих, работая одновременно, делают этот же заказ за 45 минут. За сколько минут делает этот заказ один первый рабочий?
   (Ответ 120)
3. Первая труба наполняет резервуар на 77 минут дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 18 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна первая труба?
   (Ответ 99)

4. Две машинистки должны были перепечатать рукопись. С начала первая из них работала 1,5 дня, после чего начала работать вторая, и они печатали вместе в течение 7 дней. На выполнение всей работы одной второй машинистке потребовалось бы на 3 дня меньше, чем первой. За сколько дней может перепечатать рукопись первая машинистка?
   (Ответ 17)
5. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить производственное задание за 20 дней. За сколько дней может выполнить задание каждый из них, работая самостоятельно, если одному из них для этого надо на 9 дней больше, чем другому? *(Ответ 36; 45)*

Задача 2

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

<table>
<tr><td colspan="3">Комментарии</td></tr>
<tr><td colspan="3">Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением
$t = \frac{1}{p}$.
Рассмотрим стандартную схему решения задач этого типа.
Пусть x – производительность труда первого рабочего,
y – производительность труда второго рабочего.</td></tr>
<tr><td>Условие</td><td>Наводящие вопросы</td><td>Решение</td></tr>
<tr><td>Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней.</td><td>Найдите их совместную производительность.</td><td>$x + y = \frac{1}{12}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Первый рабочий, за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня.</td><td>Какую часть работы выполнит первый рабочий за два дня?</td><td>$2x$</td></tr>
<tr><td>Какую часть работы выполнит второй рабочий за три дня?</td><td>$3y$</td></tr>
<tr><td>Составьте математическую модель по данной ситуации.</td><td>$\mathbf{2x = 3y}$</td></tr>
<tr><td>Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?</td><td>Составьте и решите систему уравнений
Надо ли найти, за сколько дней выполнит эту работу второй рабочий?

(Нет, надо найти, за сколько дней эту работу выполнит первый рабочий. Поэтому во втором уравнении выводим переменную у)</td><td>$\begin{cases} x + y = \frac{1}{12} \\ 2x = 3y \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = \frac{1}{12} \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases}$

$x + \frac{2}{3}x = \frac{1}{12}$

Решим полученное уравнение, получим х = $\frac{1}{20}$ производительность первого рабочего, тогда время выполнения его работы равно 20

Ответ: 20</td></tr>
</table>

Задачи для самостоятельного решения

1. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 4 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

.(Ответ: 28)

2. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 3 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 4 дня?

(Ответ: 21)

3. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 2 дня. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 1 день выполняет такую же часть работы, какую второй — за 2 дня?

(Ответ: 3)

4. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 9 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 5 дней выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

(Ответ: 20)

5. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 9 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 1 день выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

(Ответ: 36)

6. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 15 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

(Ответ: 25)

7. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 6 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 1 день выполняет такую же часть работы, какую второй — за 2 дня?

(Ответ: 1)

8. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 8 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 1 день?

(Ответ: 24)

9. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 6 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 4 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

(Ответ: 14)

10. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 15 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 1 день выполняет такую же часть работы, какую второй — за 3 дня?

(Ответ: 20)

11. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 3 дня. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 2 дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за 1 день?

(Ответ: 9)

Задача 3.

Две бригады слесарей должны были выполнить некоторое задание за 16 дней. После 14 дней их совместной работы вторая бригада получила другое задание, поэтому первая бригада закончила оставшуюся часть работы за 6 дней. За сколько дней могла бы выполнить задание каждая бригада, работая отдельно?

Комментарии

Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением

$$p = \frac{1}{t}.$$

Рассмотрим стандартную схему решения задач этого типа.
Пусть x – время выполнения некоторой работы первым рабочим,
y – время выполнения этой же работы вторым рабочим.

Условие	***Наводящие вопросы***	***Решение***
Две бригады слесарей должны были выполнить некоторое задание за 16 дней.	1)Найдите производительность каждой бригады; 2) Найдите их совместную производительность.	1) $\frac{1}{x};\frac{1}{y}$ – производительность каждой бригады 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$- совместная производительность
Две бригады слесарей должны были выполнить некоторое задание за 16 дней.	Составьте математическую модель данной ситуации.	*Решение:* пусть за x дней выполняет некоторое задание первая бригада, а за y дней – вторая бригада. Получим уравнение: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 16 = 1$
После 14 дней их совместной работы вторая бригада получила другое задание, поэтому первая бригада закончила оставшуюся часть работы за 6 дней.	Какую часть работы две бригады выполнили совместно?	$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 14$
	Какую часть работы первая бригада доделывала одна?	$\frac{1}{x}\cdot 6$
	Составьте математическую модель по данной ситуации.	*Решение:* пусть за x дней выполняет некоторое задание первая бригада, а за y дней – вторая бригада. Получим уравнение: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 14+\frac{1}{x}\cdot 6 = 1$

Две бригады слесарей должны были выполнить некоторое задание за 16 дней. После 14 дней их совместной работы вторая бригада получила другое задание, поэтому первая бригада закончила оставшуюся часть работы за 6 дней. За сколько дней могла бы выполнить задание каждая бригада, работая отдельно?	Составим и решим систему уравнений	$\begin{cases} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 16 = 1 \\ \left(\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{1}{y}\right)\cdot 14+\frac{1}{x}\cdot 6 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}= \\ \frac{1}{16}\cdot 4+\frac{1}{x}\cdot \end{cases}$ Ответ: x=48, y=24

Задача 4

Две бригады, работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт еще за 10 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада. Если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая бригада.

Комментарии

Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением

$p = \frac{1}{t}$.

Рассмотрим стандартную схему решения задач этого типа.
Пусть x – время выполнения некоторой работы первым рабочим,
y – время выполнения этой же работы вторым рабочим.
Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда первого рабочего,
$\frac{1}{y}$ – производительность труда второго рабочего.
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – совместная производительность труда.

Условие	***Наводящие вопросы***	***Решение***
Одна бригада выполнит всю работу за x дней, а другая – на 6 дней дольше.	1)Найдите производительность каждой бригады; 2) Найдите их совместную производительность.	1) $\frac{1}{x};\frac{1}{x+6}$ – производительность каждой бригады 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}$ – совместная производительность
Две бригады, работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада. Если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая бригада.	Составьте математическую модель данной ситуации.	*Решение:* пусть за x дней выполнит всю работу первая бригада, тогда за (x+6) дней – вторая бригада. Получим уравнение: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}\right)\cdot 6 = 1$

Две бригады, работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт **еще за 10 дней.** За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада. Если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая бригада.	Так как за один день вторая бригада выполнит $\frac{1}{x+6}$ часть работы, то за 10 дней вторая бригада отремонтирует $\frac{10}{x+6}$	*Решение:* пусть за x дней выполнит всю работу первая бригада, тогда за (x+6) дней – вторая бригада. Получим уравнение: $(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6})\cdot 6+\frac{10}{x+6}=1$. Решим полученное уравнение, получим x= 18 или x = -2 – не удовлетворяет условию задачи. Ответ: 18

Задача 5

Два слесаря получили заказ. Сначала 1 ч работал первый слесарь, затем 4 ч они работали вместе. В результате было выполнено 40% заказа. За сколько часов мог выполнить заказ каждый слесарь, если первому для этого понадобилось бы на 5 часов больше, чем второму?

<table>
<tr><td colspan="3">Комментарии</td></tr>
<tr><td colspan="3">Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением
$p = \frac{1}{t}$.
Пусть x – время выполнения некоторой работы первым рабочим, тогда
x - 5 – время выполнения этой же работы вторым рабочим.</td></tr>
<tr><td>Условие</td><td>Наводящие вопросы</td><td>Решение</td></tr>
<tr><td>Первому слесарю на выполнения заказа понадобилось на 5 часов больше чем второму.</td><td>1)Найдите производительность каждой трубы;
2) Найдите их совместную производительность.</td><td>1) $\frac{1}{x}; \frac{1}{x+5}$
− производительность каждой трубы
2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}$
− совместная производите</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Два слесаря получили заказ. Сначала 1 ч работал первый слесарь, затем 4 ч они работали вместе</td><td>Какую часть работы выполнил первый слесарь, работая один?</td><td>$\frac{1}{x}$</td></tr>
<tr><td>Какую часть работы слесари выполнят, работая вдвоем?</td><td>$(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}) \cdot 4$</td></tr>
<tr><td>Две бригады слесарей должны были выполнить некоторое задание за 16 дней. После 14 дней их совместной работы вторая бригада получила другое задание, поэтому первая бригада закончила оставшуюся часть работы за 6 дней. За сколько дней могла бы выполнить задание каждая бригада, работая отдельно?</td><td>Составим и решим систему уравнений</td><td>$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 16 = 1 \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 14 + \frac{1}{x} \cdot 6 = 1 \end{cases}$
$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \cdot 4 + \frac{1}{x} \cdot 6 = 1 \end{cases}$
Ответ: 48 дней, 24 дня</td></tr>
</table>

Задача 6

Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

<table>
<tr><td colspan="3">Комментарии</td></tr>
<tr><td colspan="3">Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением
$p = \frac{1}{t}$.</td></tr>
<tr><td>Условие</td><td>Наводящие вопросы</td><td>Решение</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов.</td><td>Какова производительность труда каждого рабочего?</td><td>$\frac{1}{15}$</td></tr>
<tr><td>Какова общая производительность труда двух рабочих?</td><td>$\frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$</td></tr>
<tr><td>За какое время рабочие выполнят заказ, работая совместно?</td><td>$\frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}} = \frac{15}{2} = 7{,}5$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе.</td><td>Какую часть работы выполнил первый рабочий за 3 часа?</td><td>$\frac{1}{15} \cdot 3 = \frac{1}{5}$</td></tr>
<tr><td>Какая часть работы осталась на совместную работу?</td><td>$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$</td></tr>
<tr><td>Сколько часов затратили рабочие на совместную работу?</td><td>$\frac{4}{5} \div \frac{2}{15} = 6$</td></tr>
<tr><td>Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?</td><td>6+3=9

Ответ 9</td></tr>
</table>

Задачи для самостоятельного решения

1. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 12 часов. Через 4 часа после того, как первый приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько всего часов работал первый рабочий?

(Ответ 8)

2. Завод получил заказ на партию штампованных деталей. Один автомат может отштамповать все детали за 16 часов. Через 2 часа после того, как первый автомат начал штамповать детали, начал работу второй такой же автомат, и оставшиеся детали были распределены между двумя автоматами поровну. Сколько всего часов потребовалось на выполнение этого заказа?

(*Ответ 9*)

3. Завод получил заказ на партию штампованных деталей. Один автомат может отштамповать все детали за 19 часов. Через 1 час после того, как первый автомат начал штамповать детали, начал работу второй такой же автомат, и оставшиеся детали были распределены между двумя автоматами поровну. Сколько всего часов потребовалось на выполнение этого заказа?

(*Ответ 10*)

4. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 8 часов. Через 4 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

(Ответ 6)

Задача 7

Два оператора, работая вместе, могут набрать 40 страниц текста за 1ч. Работая отдельно, первый оператор на набор 90 страниц этого текста тратит на 5 ч больше, чем второй оператор на набор 25 страниц. За сколько часов второй оператор сможет набрать 275 страниц этого текста?

Условие	***Наводящие вопросы***	***Решение***
V выполненной работы за единицу времени называют **производительностью (P)**	Два оператора, работая вместе, могут набрать 40 страниц текста за 1ч. Какова их совместная производительность?	40 стр./час
	Два оператора, работая вместе, могут набрать 40 страниц текста за 1ч. Работая отдельно, первый оператор на набор 90 страниц этого текста тратит на 5 ч больше, чем второй оператор на набор 25 страниц. Сколько часов тратит первый на 90 страниц?	Пусть за x часов первый оператор набирает 90 страниц. Тогда (x-5) часов тратит второй оператор на 25 страниц. $\frac{90}{x}+\frac{25}{x-5}=40$ Ответ: 6 час
	Два оператора, работая вместе, могут набрать 40 страниц текста за 1ч. Работая отдельно, первый оператор на набор 90 страниц этого текста тратит на 5 ч больше, чем второй оператор на набор 25 страниц. Сколько часов тратит второй рабочий на 25 страниц? За сколько часов второй оператор сможет набрать 275 страниц этого текста?	Пусть за x часов первый оператор набирает 90 страниц. Тогда (x-5) часов тратит второй оператор на 25 страниц. $\frac{90}{x}+\frac{25}{x-5}=40$ x -5 = 1 час - на 25 страниц. Следовательно в 11 раз больше на 275 страниц. Ответ: 1 час; 11 часов

Задачи для самостоятельного решения

1. В помощь садовому насосу, перекачивающему 9 литров воды за 4 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объем воды за 6 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 30 литров воды? (ответ: 8)

Задача 8

Вова и Толя красят забор за 10 часов. Толя и Петя красят этот же забор за 15 часов, а Петя и Вова – за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Комментарии		
Рассмотрим стандартную схему решения задач этого типа. Пусть х – время выполнения некоторой работы первым рабочим, у – время выполнения этой же работы вторым рабочим. Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда первого, $\frac{1}{y}$ – производительность труда второго. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ – совместная производительность труда.		
Условие	***Наводящие вопросы***	***Решение***
Вова и Толя красят забор за 10 часов.	Одинакова ли производительность труда каждого из мальчиков?	нет
	Пусть за х часов выполнит всю работу Вова, за у часов выполнит всю работу Толя. Какова их совместная производительность?	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}$
Петя и Вова красят забор за 18 часов.	Пусть за х часов выполнит всю работу Вова, за z часов выполнит всю работу Петя. Какова их совместная производительность?	$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{18}$
Толя и Петя красят этот же забор за 15 часов	Пусть за у часов выполнит всю работу Толя, за z часов выполнит всю работу Петя. Какова х совместная производительность?	$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}$
Вова и Толя красят забор за 10 часов. Толя и Петя красят этот же забор за 15 часов, а Петя и Вова – за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?	Надо ли найти время, за которое каждый из мальчиков отдельно покрасит забор? (Нет, надо найти время, потраченное при покраске вместе)	Составим систему: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{18}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{18}\end{cases}$ Ответ: 4,5

Задачи для самостоятельного решения

1. Оля и Настя могут покрасить стену за 120 минут, Оля и Юля – за 180 минут, а Настя и Юля – за 90 минут. Сколько минут потребуется девочкам, если они будут красить стену втроём?

   (*Ответ 80*)
2. Трое рабочих выполняют некоторою работу. Если работали только первый и второй или только первый и третий, то работа была бы выполнена за 3 дня. Если бы работали только второй и третий рабочий, то работа была бы выполнена за 6 дней. За сколько дней рабочие выполнят всю работу, если будут работать втроём?

   (*Ответ 2,4*)
3. Игорь и Паша красят забор за 18 часов. Паша и Володя красят этот же за бор за 24 часа, а Володя и Игорь – за 36 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

   (*Ответ 16*)
4. Бассейн можно наполнить через четыре трубы. Если открыты вторая, третья и четвертая трубы то бассейн наполняется за 1 час, ели открыта первая, третья и четвертая трубы – за 1 час 15 минут, а если только первая и вторая – за 1 час 40 минут. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть все четыре трубы.

   (*Ответ 50*)

Задача 9

Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 16 рабочих, а во второй — 25 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Комментарии
Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением $p = \frac{1}{t}$. Пусть $\frac{1}{x}$ – производительность каждого из рабочих в день , у – дней в новом составе бригады доделывали заказы

Условие	***Наводящие вопросы***	***Решение***
Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 16 рабочих, а во второй — 25 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады.	Какую часть работы выполнила первая бригада за 7 дней?	$\frac{16 \cdot 7}{x} = \frac{112}{x}$
	Какую часть работы выполнила вторая бригада за 7 дней?	$\frac{25 \cdot 7}{x} = \frac{175}{x}$
	Сколько рабочих стало в первой бригаде после перехода?	16+8=24
	Сколько рабочих стало во второй бригаде после перехода?	25-8=17
	Какую часть работы выполнила первая бригада после перехода рабочих из одной бригады в другую?	$\frac{24 \cdot y}{x}$
	Какую часть работы выполнила первая бригада после перехода рабочих из одной бригады в другую?	$\frac{17 \cdot y}{x}$
Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два	Какую часть работы выполнила первая бригада за весь промежуток времени?	$\frac{112}{x} + \frac{24 \cdot y}{x}$
	Какую часть работы выполнила вторая бригада за весь промежуток времени?	$\frac{175}{x} + \frac{17 \cdot y}{x}$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">одинаковых заказа. В первой бригаде было 16 рабочих, а во второй — 25 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.</td>
<td>Составьте математическую модель, учитывая, что в результате были целиком выполнены два заказа.</td>
<td>$\begin{cases} \frac{112}{x} + \frac{24 \cdot y}{x} = 1 \\ \frac{175}{x} + \frac{17 \cdot y}{x} = 1 \end{cases}$

x= 328, y= 9</td>
</tr>
<tr>
<td>Решив систему, найдем ли мы ответ на вопрос задачи? (Нет. Мы найдем количества дней затраченных на выполнение работы после перехода рабочих из одной бригады в другую)</td>
<td>7+9=16
Ответ: 16</td>
</tr>
</table>

Задачи для самостоятельного решения

1. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых дома. В первой бригаде было 3 рабочих, а во второй — 9 рабочих. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады, в результате чего оба дома были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе?

(Ответ: 3)

2. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 18 рабочих, а во второй — 22 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

(Ответ: 27)

3. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 2 рабочих, а во второй — 12 рабочих. Через 3 дня после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

(Ответ: 8)

4. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых заказа. В первой бригаде было 18 рабочих, а во второй — 22 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

(Ответ: 21)

5. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых заказа. В первой бригаде было 2 рабочих, а во второй — 12 рабочих. Через 3 дня после начала работы в первую бригаду перешли 8 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

(Ответ: 8)

6. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых заказа. В первой бригаде было 3 рабочих, а во второй — 11 рабочих. Через 2 дня после начала работы в первую бригаду перешли 6 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

(Ответ: 1)

7. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых заказа. В первой бригаде было 20 рабочих, а во второй — 29 рабочих. Через 3 дня после начала работы в первую бригаду перешли 5 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

(Ответ: 30)

8. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых заказа. В первой бригаде было 8 рабочих, а во второй — 15 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 8

рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

(Ответ: 7)

9. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых заказа. В первой бригаде было 17 рабочих, а во второй — 19 рабочих. Через 8 дней после начала работы в первую бригаду перешли 3 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

(Ответ: 30)

3.4 Задачи с параметрами.

Теория	Задача	Ответ
Линейные уравнения		
$ax=b$ При $a\neq 0$ ед. решение $x=\dfrac{b}{a}$ При $a=0, b\neq 0$ решений нет $x\in\varnothing$ При $a=b=0$ решение любое число $x\in\mathbb{R}$	Найдите решение при каждом значении a.	
	$ax=3$	при $a=0$ решений нет при $a\neq 0$ $x=\dfrac{3}{a}$ (ед. решение)
	$(2+a)x=2a+4$	при $a=-2$ решений нет при $a\neq -2$ $x=2$ (ед. решение)
	$(a^2-4)x=a^2-3a+2$	при $a=2$ x -любое число при $a=-2$ решений нет при $a\neq \pm 2$ $x=\dfrac{a+1}{a+2}$ (ед. решение)
	$4+3x=2ax+5a$	при $a\neq\dfrac{3}{2}$ $x=\dfrac{5a-4}{3-2a}$ (ед. решение) при $a=\dfrac{3}{2}$ решений нет
	$4ax-2=x-8a$	при $a\neq\dfrac{1}{4}$ $x=-2$ (ед. решение) при $a=\dfrac{1}{4}$ x -любое число
	$\dfrac{3x+2a}{x+a+3}=0$	$a\in(-\infty;-9)\cup(-9;+\infty)$ $x=-\dfrac{2a}{3}$, $a=-9$ решений нет
	$\dfrac{2x+3}{2x-a}=5$	при $x\neq\dfrac{2}{a}$ $x=\dfrac{3+5a}{8}$ (ед. решение) при $x=\dfrac{2}{a}$ решений нет
	$\dfrac{x+a^2-a}{(x+2)(x-a)}=0$	$a\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$ $x=a-a^2$ при $a=-1;0;2$ решений нет

<table>
<tr><th>Теория</th><th>Задача</th><th>Ответ</th></tr>
<tr><td colspan="3">Квадратные уравнения</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$ax^2+bx+c=0$

а) при $a=0$, $bx+c=0$ (см п.1)
б) при $a\neq 0$:

1) $D>0$, два различных корня
2) $D=0$, единственное решение (два одинаковых корня)
3) $D<0$, решений нет</td><td>Для каждого a указать количество корней уравнения</td><td></td></tr>
<tr><td>$(a+1)x^2+2(a+1)x+(a-2)=0$</td><td>при $a=-\frac{6}{7}$ ед. решение
при $a\in\left(-\infty;-\frac{6}{7}\right)$ нет решений
при $a>-\frac{6}{7}$ два корня</td></tr>
<tr><td>$(a-1)x^2+(a+4)x+(a+7)=0$</td><td>единственное решение при $a=1, x=-\frac{8}{5}; a=2, x=-3; a=-\frac{22}{3}, x=-\frac{1}{5}$ два корня при $a\in\left(-\frac{22}{3};2\right)$
нет корней при $a\in\left(-\infty;-\frac{22}{3}\right)\cup(2;+\infty)$</td></tr>
</table>

Теория	Задача	Ответ
Расположение корней квадратного уравнения при заданных условиях		
Для того, чтобы два различных корня квадратного уравнения были меньше чем число x_0, необходимо и достаточно выполнение условий $\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{b}{2a}>x_0 \\ a\cdot f(x_0)>0 \end{cases}$, $где\ f(x_0)=ax^2+bx+c$	Укажите значение параметра p, при котором оба корня уравнения $(p-1)x^2+2px-4+p=0$ меньше-2?	$p\in(\frac{4}{5};1)$
Для того, чтобы два различных корня квадратного уравнения были меньше чем число x_0, необходимо и достаточно выполнение условий $\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{b}{2a}>x_0 \\ a\cdot f(x_0)>0 \end{cases}$, $где\ f(x_0)=ax^2+bx+c$	Укажите значение параметра a, при котором оба корня уравнения $x^2-2(a+1)x+(a^2-2a+4)=0$ больше 1 ?	$a\in(\frac{3}{4};1)\cup(3;4)$
Для того, чтобы один из корней квадратного уравнения был меньше чем число x_0, а другой больше x_0 необходимо и достаточно выполнение условия $a\cdot f(x_0)>0$	Укажите значение параметра a, при котором корни уравнения находятся по разные стороны от числа 3? $x^2+(4a+5)x+3+2a=0$	$a<-17,6$

Задачи для самостоятельного решения

1. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{x-a}{2x+3a+5}=0$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty), x=a$; при $a=-1$ решений нет.

2. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{3x+2a}{x+a+3}=0$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-9)\cup(-9;+\infty),\ x=-\dfrac{2a}{3}$; при $a=-9$ решений нет.

3. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{(x+a)(x-3a+1)}{x-2}=0$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-2)\cup(-2;\dfrac{1}{4})\cup(\dfrac{1}{4};1)\cup(1;+\infty),\ x_1=3a-1,\ x_2=-a$,

при $a=-2,\ x_1=3a-1=-7;\ a=1,\ x=-a=-1; a=\dfrac{1}{4},\ x_1=x_2=-\dfrac{1}{4}$.

4. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{(x-2)(x+2a)}{x-a^2-a}=0$.

Ответ: при $\begin{matrix} a\in(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty), x_1=2, x_2=-2a; \\ a=-3;0, x_1=2; a=-2, x_2=4; a=1, x_2=-2; a=-1, x_1=x_2=2 \end{matrix}$.

5. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{x+a^2-a}{(x+2)(x-a)}=0$

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty), x=a-a^2$; при $a=-1;0;2;$ решений нет.

6. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{x^2-a^2}{x+3}=0$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-3)\cup(-3;0)\cup(0;3)\cup(3;+\infty), x_{1/2}=\pm a$ два решения;

при $a=\pm 3, x=3; a=0, x=0$ единственное решение.

7. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{(x-a)(x+2a)}{x^2-2x+a}=0$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-\dfrac{5}{4})\cup(-\dfrac{5}{4};0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty), x_1=a, x_2=-2a$;

при $a=0,$ решений нет;

при $a=-\dfrac{5}{4}, x_1=-\dfrac{5}{4}; a=1, x_2=-2$ единственное решение.

8. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{x^2+3x-a}{(x-3a)(x+a)}=0$.

Ответ: $a\in(-\frac{9}{4};-\frac{8}{9})\cup(-\frac{8}{9};0)\cup(0;4)\cup(4;+\infty)$ два решения;

при $a<-\frac{9}{4}$ решений нет;

при $a=-\frac{9}{4}, x=-\frac{3}{2}; a=-\frac{8}{9}, x_1=-\frac{1}{3}; a=0, x=-3; a=4, x_2=-1.$

9. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{x^2+2x-3}{x(x+a)}=0$.

Ответ: при $a\in(-\infty;-1)\cup(-1;3)\cup(3;+\infty), x_1=1, x_2=-3$;

при $a=3, x=1; a=-1, x=-3$ единственное решение.

10. Для всех значений параметра а решите уравнение $\dfrac{|x|-2a-1}{x^2+2ax+a^2}=0$.

Ответ : при $a\in(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3})\cup(-\frac{1}{3};+\infty), x=\pm(2a+1)$;

при $a\in\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ одно решение $x=-(2a+1)$;

при $a<\frac{1}{2}$ решение нет.

3.5 Теория вероятностей

Задание 1

Какова вероятность того, что последние две цифры телефонного номера случайного абонента в сумме дают 10?

<table>
<tr><th>Теория</th><th>Задача</th><th>Решение</th><th>Ответ</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Для решение данного типа задач, можно воспользоваться таблицей исходов.</td>
<td>Продолжите заполнение таблицы.
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1:1</td><td>1:2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2:1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1:1</td><td>1:2</td><td>1:3</td><td>1:4</td><td>1:5</td><td>1:6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2:1</td><td>2:2</td><td>2:3</td><td>2:4</td><td>2:5</td><td>2:6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3:1</td><td>3:2</td><td>3:3</td><td>3:4</td><td>3:5</td><td>3:6</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4:1</td><td>4:2</td><td>4:3</td><td>4:4</td><td>4:5</td><td>4:6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5:1</td><td>5:2</td><td>5:3</td><td>5:4</td><td>5:5</td><td>5:6</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6:1</td><td>6:2</td><td>6:3</td><td>6:4</td><td>6:5</td><td>6:6</td></tr>
</table>
</td>
<td>см. решение</td>
</tr>
<tr>
<td>Найдите сумму пересечения столбца и строки и заполните таблицу.
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
</table>
</td>
<td>см. решение</td>
</tr>
</table>

	Игральную кость бросают дважды. Сколько можно получить вариантов возможных событий выпадения очков?		36
	Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию A = {сумма очков равна 7}?		6
	В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10. Результат округлите до сотых.		0,08
	Задание 1. (*Ответ*)		0,09

Задание 2

В корзине лежат 4 белых и 2 черных шара. Из корзины достали 2 шара. Какова вероятность того, что они одного цвета?

Теория	Задача	Решение	Ответ
$p(a)=\frac{m}{n}$	В урне 10 белых и 8 черных шаров. Наудачу отобран 1 шар. Найдите вероятность того, что он белый. Ответ округлите до сотых.		0,56
и $\leftrightarrow$ * $p(ab)=p(a)\overset{\text{и}}{*}p(b)$	В урне 10 белых и 8 черных шаров. Наудачу отобраны 2 шара. Найдите вероятность того, что они белые. Ответ округлите до сотых.		0,29
$C_n^к=\frac{n!}{(n-к)!к!}$	В урне 10 белых и 8 черных шаров. Наудачу отобраны 5 шаров. Найдите вероятность того, что среди них окажется ровно 2 белых шара.		0,294
	В урне 5 белых и 5 красных шаров. Какова вероятность вытащить наудачу оба белых шара?		0,222
$P=\frac{C_K^к\cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$	Задание 2. (*Ответ*)		0,467

Задание 3

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 85% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 10% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 55% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Теория	Задача	Решение	Ответ
1% -это сотая часть числа: *40%=0,4*	Переведите проценты в десятичную дробь: 80%, 30%, 50%		0,8; 0,3; 0,5
Чтобы найти % от числа, нужно перевести % в десятичную дробь и умножить на данное число: *5%=0,05;* $80 \cdot 0{,}05 = 4$	Найдите дробь от числа: 5% от 80 10% от 25 40% от 160 20% от х 30% от у		4; 2,5; 64; 0,2 х; 0,3 у
	Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. Всего 2400 штук. Соотношение покупок в первом и втором хозяйствах составляет 5:3. Сколько яиц купили в первом хозяйстве?		1500
	Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. Соотношение покупок в первом и втором хозяйствах составляет 5:3. Сколько процентов яиц купили в первом хозяйстве?		62,5
	Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. Соотношение покупок в первом и втором хозяйствах составляет 5:3. Какова вероятность того, что		0,625

	случайно выбранное яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства?		
	Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. В том числе яйца высшей категории. Всего высшей категории получает 55% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется высшей категории.		0,55
$p(a)=\frac{m}{n}$	Задание 3. (*Ответ*)		0,6

Задание 4

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,1, а при каждом последующем – 0,9. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,95?

Теория	Задача	Решение	Ответ
	Вероятность попадания в мишень равна 0,6. Найдите вероятность непопадания.		0,4
и $\leftrightarrow$ * $p(ab) = p(a) \overset{\text{и}}{*} p(b)$	Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся. Результат округлите до десятых.		0,1
	Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется ровно три попытки.		0,096
Пусть p-это вероятность попадания, q-вероятность промаха. Тогда p+q=1 *Правило умножения* $Q = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 ..$ *-вероятность , что никто не попал*	*Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,7 и 0,9. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.*		0,994

$P = 1 - Q$ *вероятность, что хотя бы кто-то попал.*			
	При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения за несколько выстрелов будет не менее 0,95. Какова вероятность промаха за такое же количество выстрелов?		Меньше или равно 0,05 ($\leq 0,05$)
	Задание 4. (*Ответ*)		3

Задание 5

Чтобы поступить в институт на специальность «Переводчик», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 62 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Социология», нужно набрать не менее 62 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание.
Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 62 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку – 0,5, по иностранному языку – 0,9 и по обществознанию – 0,7. Найдите вероятность того, что А. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Теория	Задача	Решение	Ответ
и$\leftrightarrow$* $p(ab) = p(a) \overset{\text{и}}{*} p(b)$	Чтобы получить аттестат особого образца, выпускник должен сдать ЕГЭ по русскому языку и по математике не менее чем на 70 баллов. Вероятность того, что выпускник наберёт не менее 70 баллов по русскому языку, равна 0,8, а по математике - 0,5. Какова вероятность того, что выпускник получит аттестат особого образца?		0,4
Пусть p-это вероятность попадания, q-вероятность промаха. Тогда p+q=1	Чтобы поступить в институт на специальность «Наноинженерия», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 68 баллов по каждому из трёх предметов – математике, русскому языку и физике. Вероятность того, что абитуриент А. получит не менее 68 баллов по математике, равна 0,5, по русскому языку – 0,5, по физике – 0,4. Найдите вероятность того, что А. не сможет поступить на эту специальность, при условии, что набрал нужное количество баллов по математике и русскому языку.		0,15

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий. Если события А и В – совместные, то их сумма А+В обозначает наступление или события А, или события В, или обоих событий вместе. Если А и В – несовместные события, то их сумма А+В означает наступление или события А, или события В. $P = P(A) + P(B)$	Задание 5. (*Ответ*)		0,2325

Задание 6

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что 76% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Теория	Задача	Решение	Ответ
	Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. Известно, что 76% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Сколько процентов пациентов здоровы?		24
	Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. Известно, что 76% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Какая часть пациентов больна гепатитом, а какая часть пациентов - здорова?		0,76 и 0,24
Пусть р-это вероятность успеха, q-вероятность неудачи. Тогда р+ q=1.	Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. Известно, что 76% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что поступивший пациент болен.		0,76
	Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У		0,2

	больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что анализ даст отрицательный результат у больных гепатитом пациентов?		
	Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Какова вероятность того, что у здорового пациента результат будет отрицательный?		0,98
и $\leftrightarrow *$ $p(ab)=p(a)\overset{\text{и}}{*}p(b)$ или $\leftrightarrow +$ $p(a+b)=p(a)\overset{\text{или}}{+}p(b)$	Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,8. Известно, что 76% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у больного пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.		0,608
	Задание 6. (Ответ)		0,6128

Задание 7

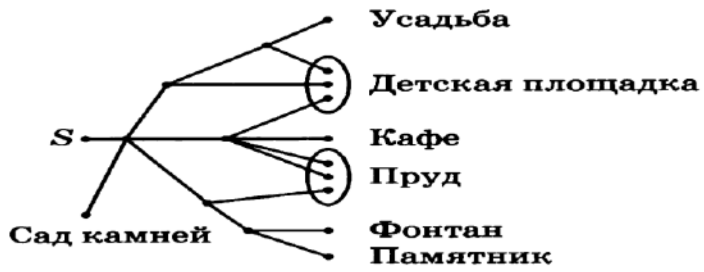
За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом.

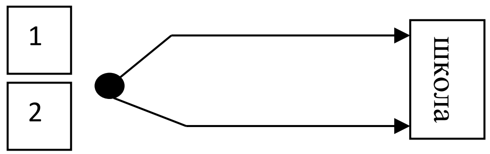
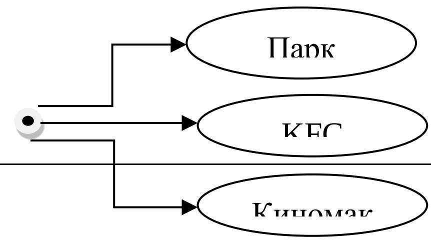
Теория	Задача	Решение	Ответ
	За круглым столом стоят 5 стульев. Сколькими способами можно рассадить 5 девочек за столом?		120
Перестановки $P = n!$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$	За круглым столом стоят 5 стульев. Сколькими способами можно рассадить 2 девочек за столом?		72
Размещения $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	За круглым столом на 9 персон в случайном порядке рассаживаются 2 девочки. Какова вероятность того, что они будут сидеть рядом за столом?		0,25
	За круглым столом на 9 персон в случайном порядке рассаживаются 2 девочки. Какова вероятность того, что они не будут сидеть рядом за столом?		0,75
В общем случае для n девочек и m мальчиков, сидящих девочки с девочками, а мальчики с мальчиками, количество способов занять места за круговым столом равно $n!m!$, а вероятность случайной	За круглый стол на 101 стул в случайном порядке рассаживаются 99 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между девочками будет сидеть один мальчик.		0,02

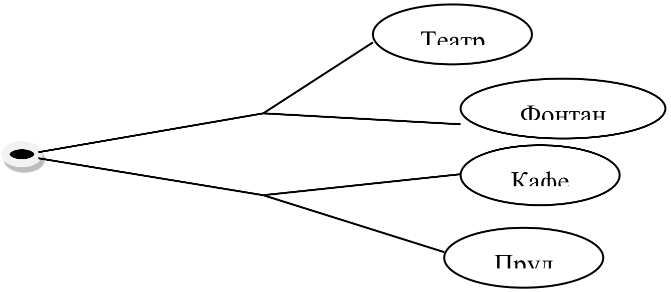
рассадки требуемым образом равна $\frac{n!m!}{(n+m-1)!}$			
	За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом за столом.		0,5
	Задание 7. (*Ответ*)		0,75

Задание 8

Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



Теория	Задача	Решение	Ответ
	Максим может пойти в школу разными путями. Какова вероятность того, что Максим пойдет по пути №2? **1.**  \		0,5
	Александр выходит из дома на прогулку. Какова вероятность того, что он пойдет в Парк развлечений? Ответ округлите до сотых.		0,33

и ↔ * $p(ab)=p(a)\overset{\text{и}}{*}p(b)$	Иван Иванович гуляет по парку. Какова вероятность того, что он, выбирая путь, выйдет к кафе? 		0,25
	Задание 8. (*Ответ*)		0,3125

Задание 9

Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры идут подряд в порядке убывания, например 3210 или 6543?

Теория	Задача	Решение	Ответ
$p(a)=\frac{m}{n}$	Клиент получает в банке кредитную карту. Карта имеет шестнадцатизначный номер. Какова вероятность того, что последняя цифра номера 5?		0,1
Пусть p-это вероятность успеха, q-вероятность неудачи. Тогда p+ q=1.	Клиент получает в банке кредитную карту. Карта имеет шестнадцатизначный номер. Какова вероятность того, что последняя цифра номера не 5?		0,9
	Клиент получает в банке кредитную карту. Карта имеет шестнадцатизначный номер. Сколько существует комбинаций того, что последние две цифры номера одинаковые?		10
	Клиент получает в банке кредитную карту. Карта имеет шестнадцатизначный номер. Сколько существует комбинаций того, что последние две цифры номера разные?		100
и$\leftrightarrow$* $p(ab)=p(a)\overset{и}{*}p(b)$	Клиент получает в банке кредитную карту. Карта имеет шестнадцатизначный номер. Какова вероятность того, что последние две цифры номера одинаковые?		0,1
Пусть p-это вероятность успеха, q-вероятность неудачи. Тогда p+ q=1.	Клиент получает в банке кредитную карту. Карта имеет шестнадцатизначный номер. Какова вероятность того, что последние две цифры номера разные?		0,9
	Клиент получает в банке кредитную карту. Карта имеет шестнадцатизначный номер. Какова вероятность того, что последние три цифры номера разные?		0,99

$p(a)=\frac{m}{n}$	Клиент получает в банке кредитную карту. Карта имеет шестнадцатизначный номер. Три последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние три цифры идут подряд в порядке убывания, например 210 или 543?		0,008
	Задание 9. (*Ответ*)		0,0007

Задание 10

На складе на одном стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных клавиатур: 30 черных, 10 белых и 10 серых. На другом стеллаже лежат в случайном порядке 50 запечатанных компьютерных мышей: 30 черных, 10 белых и 10 серых. Найдите вероятность того, что случайно выбранные клавиатура и мышь, будут одного цвета.

Теория	Задача	Решение	Ответ
$p(a)=\frac{m}{n}$	На складе на одном стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных клавиатур: 30 черных, 10 белых и 10 серых. На другом стеллаже лежат в случайном порядке 50 запечатанных компьютерных мышей: 30 черных, 10 белых и 10 серых. Найдите вероятность того, что случайно выбранная клавиатура будет черного цвета.		0,6
	На складе на одном стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных клавиатур: 30 черных, 10 белых и 10 серых. На другом стеллаже лежат в случайном порядке 50 запечатанных компьютерных мышей: 30 черных, 10 белых и 10 серых. Найдите вероятность того, что случайно выбранная мышь будет черного цвета.		0,6
и$\leftrightarrow$* $p(ab)=p(a)\overset{\text{и}}{*}p(b)$	На складе на одном стеллаже лежат в случайном порядке 50 запакованных клавиатур: 30 черных, 10 белых и 10 серых. На другом стеллаже лежат в случайном порядке 50 запечатанных компьютерных мышей: 30 черных, 10 белых и 10 серых. Найдите		0,36

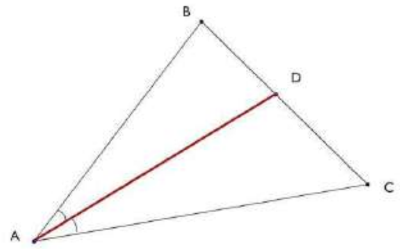
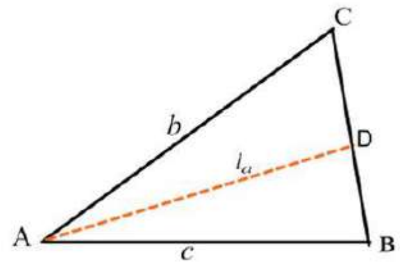
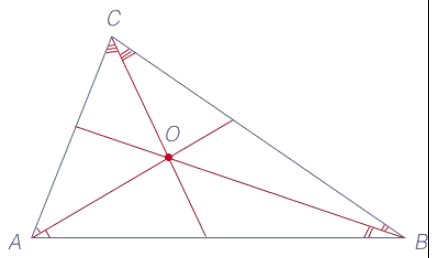
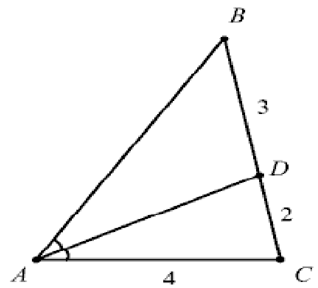
	вероятность того, что случайно выбранные клавиатура и мышь будут черного цвета.		
и $\leftrightarrow$ * $p(ab) = p(a) \overset{\text{и}}{*} p(b)$ $P = P(A) + P(B)$	Задание 10. (*Ответ*)		0,44

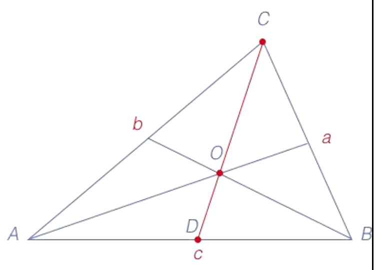
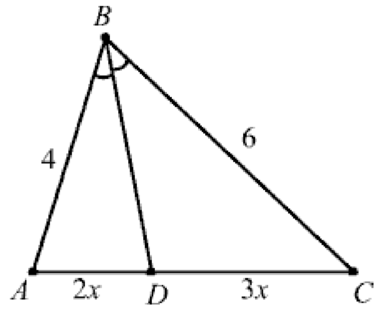
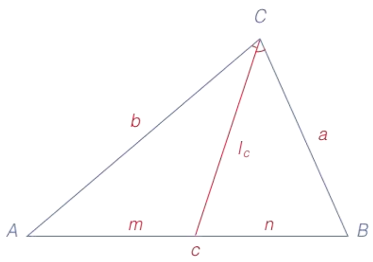
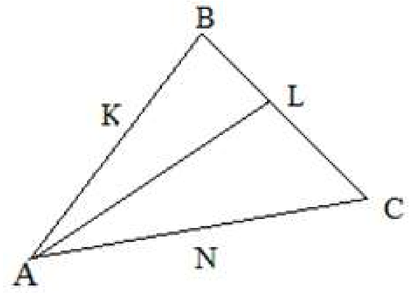
4. Геометрия. Планиметрия

Составители:

1. Григорьева Вера Анатольевна, МАОУ СОШ № 13 г. Темрюк, Темрюкский район
2. Жидкова Ирина Анатольевна, МБОУ СОШ № 10 ст. Нововладимировская Тбилисского района
3. Крапчатая Ирина Александровна, МБОУ СОШ № 1 ст. Тбилисская, Тбилисского района
4. Саркисян Ксения Александровна, МОБУ СОШ № 22 станицы Чамлыкской, Лабинского района.
5. Логинова Татьяна Артуровна, МОБУ СОШ № 10 посёлка Прохладного, Лабинского района.
6. Марченко Татьяна Григорьевна, МБОУ СОШ № 10, Горячий Ключ
7. Гладкова Ольга Алексеевна, МБОУ СОШ № 9, Горячий Ключ.
8. Кармазина Маргарита Викторовна, МБОУ СОШ № 1 ст. Полтавской, Красноармейский район
9. Федоренко Андрей Михайлович, МАОУ СОШ № 7 ст. Полтавской, Красноармейский район
10. Ряденцева Марина Владимировна, МБОУ СОШ №3, г. Ейск.
11. Городицкая Галина Анатольевна, МБОУ СОШ №2, г. Ейск
12. Никитина Наталия Николаевна, МБОУ ООШ №10, Приморско-Ахтарский район
13. Беспалова Марина Алексеевна, МБОУ СОШ №5 им. Г.Я. Бахчиваджи, Приморско-Ахтарский район
14. Пенькова Анастасия Николаевна, МБОУ СОШ № 14 с. Соколовское, Гулькевичский район
15. Роговая Марина Александровна, МБОУ СОШ № 15, с. Отрадо-Кубанское, Гулькевичский район
16. Бушман Жанна Анатольевна, МБОУ СОШ № 11, г. Кропоткин, Кавказский район
17. Сидоришина Елена Николаевна, МБОУ СОШ № 2 г. Геленджик
18. Голинченко Ольга Николаевна, учитель математики МБОУ СОШ № 5 имени Якова Павловича Сторчака, ст. Октябрьской МО Крыловский район,
19. Богачева Светлана Ивановна, учитель математики МБОУ ООШ № 14 хутора Лобова Балка МО Крыловский район,
20. Насонова Татьяна Владимировна, учитель математики МБОУ СОШ №3 имени Адмирала Нахимова г. Геленджик

4.1 Тема: «Биссектриса треугольника и её свойства»

Основные свойства и формулы	**Условие задач**
Биссектрисой треугольника называется отрезок, который соединяет вершину с противоположной стороной и делит соответствующий угол пополам. 	Вычислить длину биссектрисы треугольника, если известны, длины двух прилежащих сторон треугольника и угол между ними.  Ответ: $L_a = \frac{2ab}{b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке - центре вписанной в треугольник окружности. 	Вычислите биссектрису треугольника ABC, проведённую из вершины A, если BC = 18, AC = 15, AB = 12. Ответ: 10.
Если CD - биссектриса угла C треугольника ABC, то $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$ и $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{AC}{BC}$	В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите периметр треугольника ABC, если AC = 4; DC = 2; BD = 3. Ответ: 15. 

Точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла C в отношении a + bc, считая от вершины: $\frac{CO}{OD}=\frac{a+b}{c}$  	Дан треугольник ABC, в котором ∠ B = 30°, AB = 4, BC = 6. Биссектриса ∠ B пересекает сторону AC в точке D. Определите площадь треугольника ABD. Ответ: 12/5. 
Биссектриса угла C вычисляется по формулам: $L_C=\frac{2ab\cos\frac{c}{2}}{a+b}$, $L_C=\frac{1}{a+b}\cdot\sqrt{ab\left[(a+b)^2-c^2\right]}$ $L_C=\sqrt{ab-mn}$  	В треугольнике ABC со стороной AB = 5 см провели биссектрису AL, которая разделила сторону BC на отрезки BL = 3 см и LC = 6 см. Найти сторону AC. Ответ: 10. 

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC со сторонами AB = 2см, BC = 3 см и AC = 3 см проведена биссектриса BM. Найдите длины отрезков AM и MC. Ответ: *1,2см, 1,8см.*

2. В треугольнике MNK известны длины сторон MN = 4 см, NK = 5 см, NP — биссектриса, а разность длин отрезков MP и PK равна 0,5 см. Найдите MP и PK. Ответ: *2см,2,5см.*

3. В треугольнике DEP проведена биссектриса EK. Найдите стороны DE и EP, если DK = 3 см, KP = 4 см, а периметр треугольника DEP равен 21 см. Ответ: *6см,8см.*

4. В треугольнике ABC: BC – AB = 3 см, биссектриса BD делит сторону AC на отрезки AD = 2 см и DC = 3 см. Найдите длины сторон AB и BC.
Ответ: *6см, 9см.*

5. Периметр треугольника CDE равен 55 см. В этот треугольник вписан ромб DMFN так, что вершины M, F и N лежат соответственно на сторонах CD, CE и DE. Найдите стороны CD и DE, если CF = 8 см, EF = 12 см. Ответ: *14см, 21см.*

6. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла. Известно, что эта биссектриса делит противолежащий катет на отрезки 4 см и 5 см. Найдите площадь прямоугольного треугольника. Ответ: *54 см$^{2.}$*

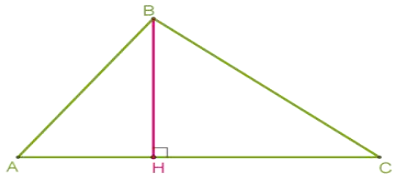
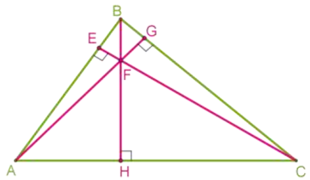
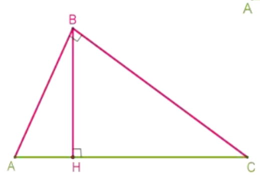
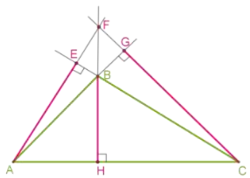
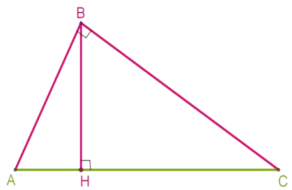
7. Точка O на гипотенузе равноудалена от двух катетов прямоугольного треугольника и делит гипотенузу на части длиной 30 см и 40 см. Найдите площадь треугольника. Ответ: *1176 см$^{2.}$*

8. Найдите угол между биссектрисами двух углов треугольника, если градусная мера одного из этих углов равна 40°, а градусная мера третьего угла 60°. Ответ: 120°.

9. В треугольнике MNP биссектрисы MD и NK пересекаются в точке P. Найдите в каком отношении точка P делит биссектрису NK, если MN = 5 см, NP = 3 см, MP = 7 см. Ответ: 7:8.

10. В треугольнике ABC угол A равен 56°, углы B и C – острые. Высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах. Ответ: 124°.

4.2 Тема: «Высота треугольника»

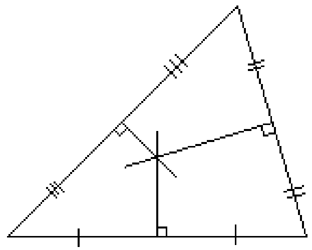
Основные свойства и формулы	Условие задач
Высота треугольника — это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону. 	В треугольнике ABC со стороной AB = 8 см и $\angle A = 45°$ найти высоту, опущенную из вершины B. Ответ: $4\sqrt{2}$
Высоты треугольника пересекаются в одной точке. Остроугольный треугольник  Прямоугольный треугольник  Тупоугольный треугольник 	Вычислите длину высоты равностороннего треугольника, сторона которого равна 12 см. Ответ: $6\sqrt{3}$ В треугольнике ABC AB = BC. Угол B = 120º. AC = 4. Найдите высоту, опущенную из вершины C. Ответ: 2
В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному. В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники. 	Найти наибольшую высоту треугольника со сторонами 5 см, 5 см и 6 см. Ответ: 4,8

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют *серединным перпендикуляром* к отрезку.

Свойства серединных перпендикуляров треугольника

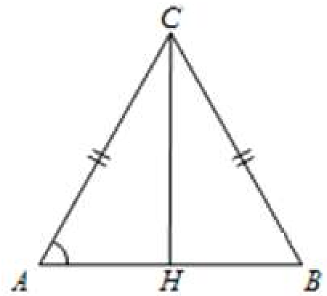
Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанного около этого треугольника.



В треугольнике ABC AC = BC = 25, AB = 40. Найдите sin A. .

Ответ: 0,6



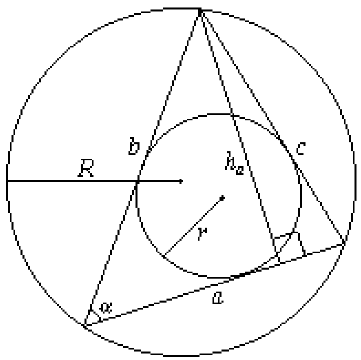
Формулы площади треугольника

$$S = \frac{1}{2} a h_a \qquad S = p \cdot r$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\alpha$$

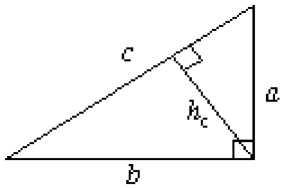
$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

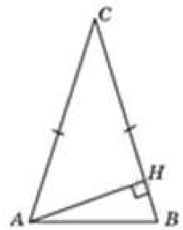


В равнобедренном треугольнике основание равно 4, а боковая сторона равна 8. Найти квадрат высоты, опущенной на боковую сторону.

Ответ: 15

Прямоугольный треугольник *a, b* — катеты; *c* — гипотенуза; h_c — высота, проведенная к стороне *c*.  $S = \frac{1}{2}ab$ $S = \frac{1}{2}ch_c$	В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, равна 8, а основание относится к боковой стороне как $6:5$. Найти, на каком расстоянии от вершины треугольника находится точка пересечения его биссектрис. Ответ: 5

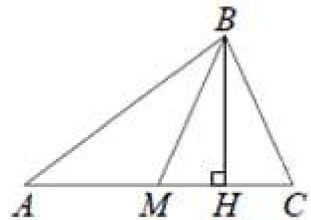
Задачи для самостоятельного решения



1. В треугольнике ABC AC = BC = $4\sqrt{15}$, cos BAC = 0,25. Найдите высоту AH. Ответ: 7,5

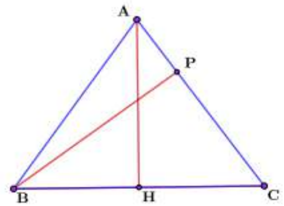
2. В треугольнике ABC AC=BC=4, угол C равен 30°. Найдите высоту AH. Ответ: 2

3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника. Ответ: 12



4. В треугольнике ABC сторона AC =12, BM — медиана, BH — высота, BC = BM. Найдите длину отрезка AH. Ответ: 9

5. В треугольнике ABC AK и BH - высоты. AC = 6, BH = 4, BC = 3. Найдите высоту AK. Ответ: 8



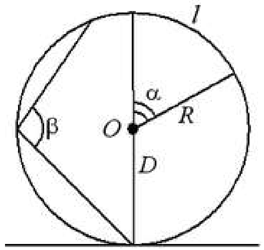
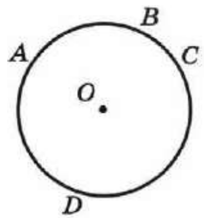
6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведены высоты AH и BP. Синус угла ACB равен 0,6, а боковая сторона 5. Найти высоту BP. Ответ: 4,8

7. В равнобедренном треугольнике основание и опущенная на него высота, равны 16. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности. Ответ: 10

8. Найдите длины сторон AB и AC остроугольного треугольника ABC, если BC = 8, а длины высот, опущенных на стороны AC и BC, равны 6, 4 и 4 соответственно. Ответ: AC=5, AB= $\sqrt{41}$

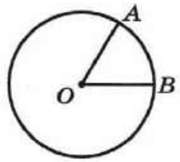
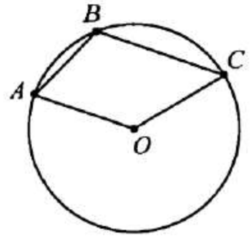
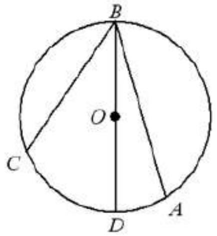
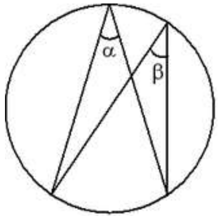
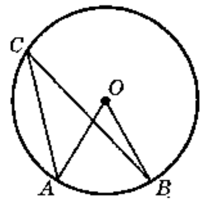
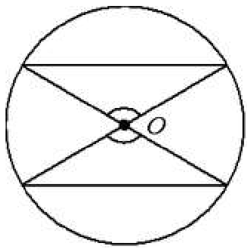
4.3 Тема: «Планиметрия. Окружность»

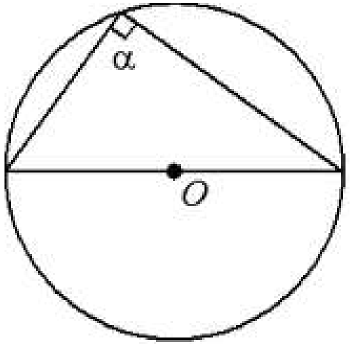
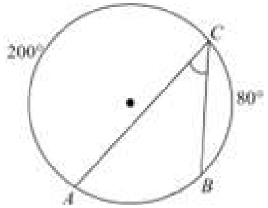
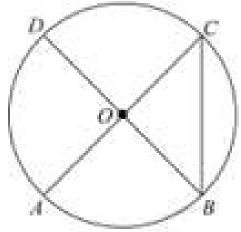
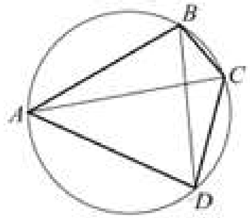
Окружность и ее элементы

Основные свойства и формулы	Условие задач
Окружность — множество всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние (равное радиусу) от заданной точки этой же плоскости (центра окружности).	Окружность радиуса 18 поделена на 9 равных секторов. а) Найдите градусную меру дуги каждого сектора; б) Найдите длину дуги каждого сектора. Ответ: а) 40°, б) 4π
Радиусы — отрезки, соединяющие точки окружности с центром. Все радиусы данной окружности равны.	
Хорда — отрезок, соединяющий любые две точки окружности. Касательная — прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярно ее радиусу.  Касательная имеет с окружностью только одну общую точку.	Центральный угол АОВ опирается на хорду АВ так, что $\angle OAB = 60^0$. Найдите длину хорды АВ, если радиус окружности равен 8. Ответ: 8.
	На окружности последовательно в указанном порядке расположены точки A, B, C и D. Данные точки делят окружность на четыре дуги – AB, BC, CD и AD, градусные меры которых относятся как 1:2:2:3 соответственно. Найдите градусную меру меньшей дуги AC.  Ответ: 135°.

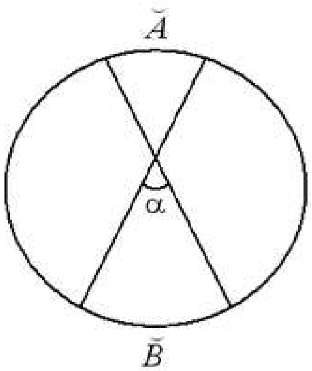
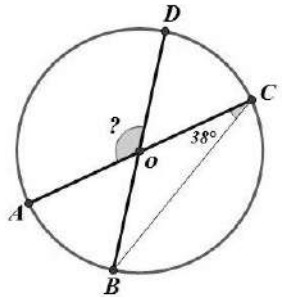
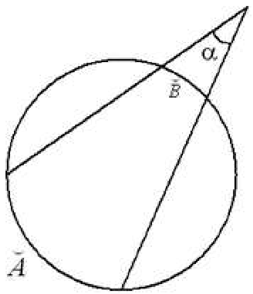
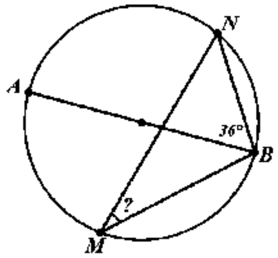
Диаметр — хорда, проходящая через центр окружности. Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде	На окружности радиуса 16 с центром О проведена хорда АС. Найдите длину хорды, если $\angle AOC = 60^0$ Ответ: 16.
Длина окружности: $L = 2\pi R = \pi D$, R - радиус окружности, D — диаметр.	
Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью. Площадь круга: $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$	В окружности с центром в точке О проведены диаметры AD и BC, угол OAB равен 25°. Найдите величину угла OCD. Ответ: 25°.
Сектор — часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности.	

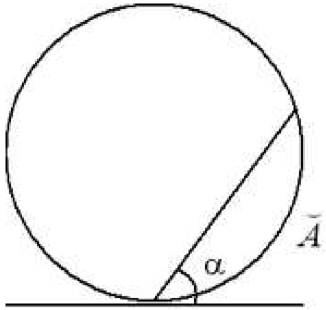
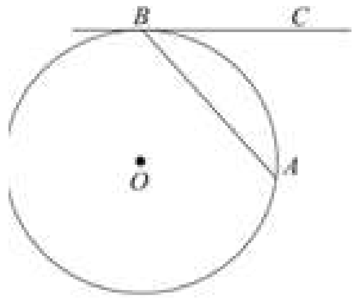
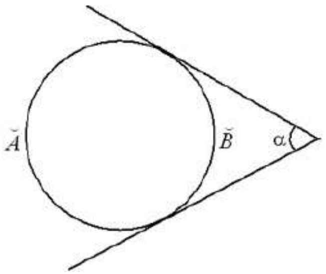
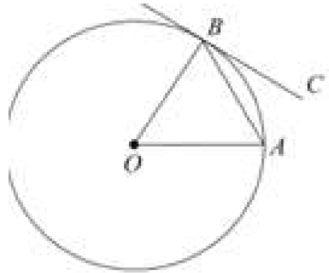
Центральные и вписанные углы

Основные свойства и формулы	Условие задач
Центральный угол — угол, образованный двумя радиусами. Центральный угол измеряется дугой, на которую опирается. 	Найдите угол ABC, если точка O – центр окружности и $\angle AOC = 130^0$. Ответ: 115°. 
Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются ее хордами. Величина вписанного угла равна половине дуги, на которую он опирается. 	
Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны: $\alpha = \beta$. 	Найдите угол ACB, если точка O – центр окружности и $\angle AOB = 80^0$. Ответ: 40°. 
Равные дуги окружности стягиваются равными хордами. 	Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в градусах. Ответ: 150°.
	Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах. Ответ: 36°.

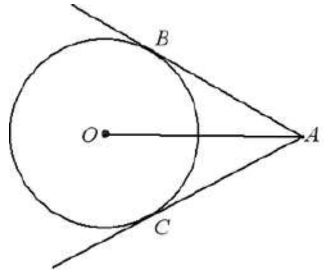
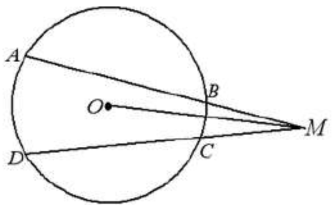
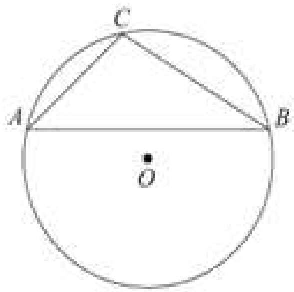
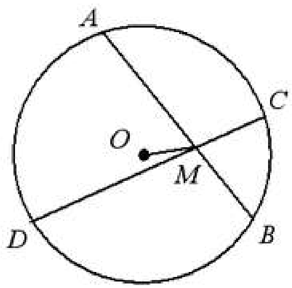
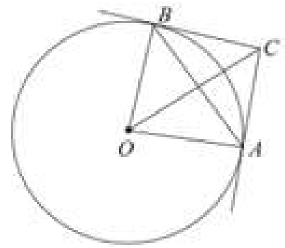
Вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой.  	Дуга окружности AC, не содержащая точки B, составляет 200°. А дуга окружности BC, не содержащая точки A, составляет 80°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах. Ответ: 40°. 
	В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Вписанный угол ACB равен 38°. Найдите центральный угол AOD. Ответ дайте в градусах. Ответ: 104°. 
	Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABD равен 61°, угол CAD равен 37°. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах. Ответ: 98 °. 

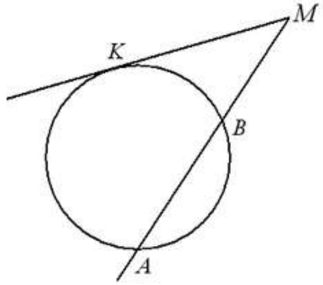
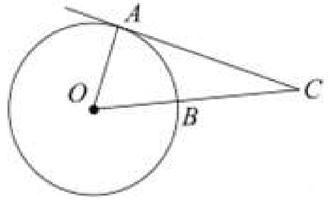
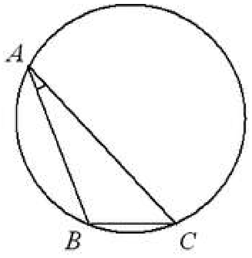
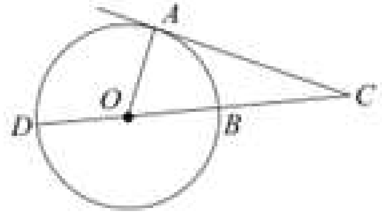
Углы, связанные с окружностью

<table>
<tr><th>Основные свойства и формулы</th><th>Условие задач</th></tr>
<tr><td>Угол между двумя пересекающимися хордами равен полусумме высекаемых ими дуг.

</td><td>AC и BD –диаметры окружности с центром О. Угол ACB равен 38°. Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.
Ответ: 104°.

</td></tr>
<tr><td>Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг:
$\alpha = \frac{\bar{A} - \bar{B}}{2}$

</td><td>На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что угол NBA равен 36°. Найдите угол NMB Ответ дайте в градусах.
Ответ: 54 °.

</td></tr>
</table>

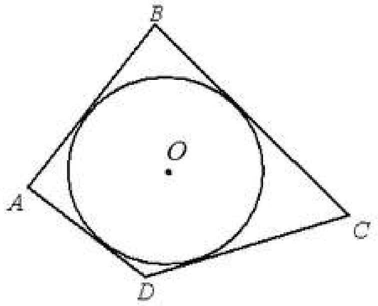
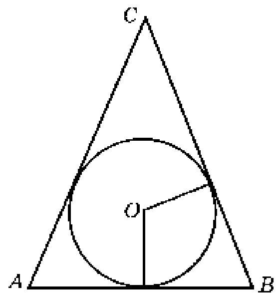
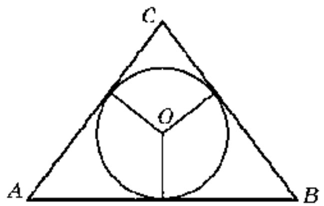
Угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой: $\alpha = \frac{\overline{A}}{2}$ 	Хорда *AB* стягивает дугу окружности в 92°. Найдите угол *ABC* между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку *B*.  Ответ дайте в градусах. Ответ: 46 °.
Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг:  $\alpha = \frac{\overline{A} - \overline{B}}{2}$.	Угол между хордой *AB* и касательной *BC* к окружности равен 32°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой *AB*. Ответ дайте в градусах.  Ответ: 64 °.

Отрезки, связанные с окружностью

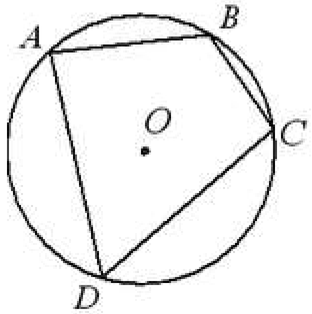
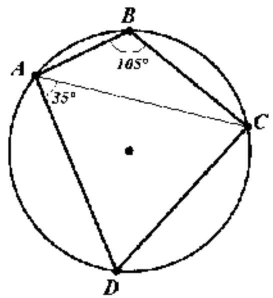
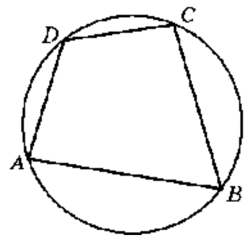
Основные свойства и формулы	Условие задач
Отрезки касательных к окружностям, проведенным из одной точки, равны: AB = AC, центр окружности лежит на биссектрисе угла BAC. . 	Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах. Ответ: 135°.
Произведение секущей на ее внешнюю часть есть для данной окружности величина постоянная и равная разности квадратов расстояния от точки пересечения секущих до центра окружности и радиуса окружности:  $(AB+BM)\cdot BM=(DC+CM)\cdot CM=MO^2-R^2$	Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности?  Ответ дайте в градусах. Ответ: 105°.
Произведение отрезков, на которые делится хорда данной точкой, есть для данной окружности величина постоянная и равна разности квадратов радиуса окружности и расстояния от точки M до центра окружности:  $AM\cdot MB=CM\cdot MD=R^2-MO^2$.	Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB.  Ответ дайте в градусах. Ответ: 118°.

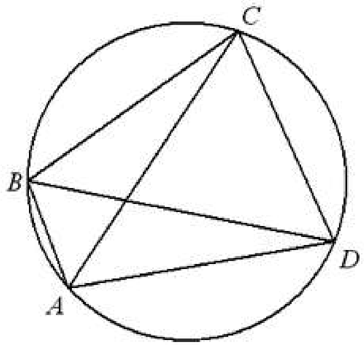
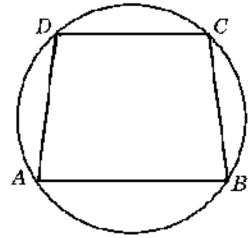
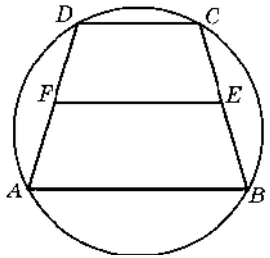
Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $KM^2 = MB \cdot (MB + AB)$.  	Угол ACO равен 28°, где O — центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Найдите величину меньшей дуги AB окружности, заключенной внутри этого угла. Ответ дайте в градусах. Ответ: 62°. 
Отношение хорды к синусу вписанного угла, который на нее опирается, равно двум радиусам (теорема синусов): $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R$  	Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности, O — центр окружности, а большая дуга AD окружности, заключенная внутри этого угла, равна 116°. Ответ дайте в градусах. Ответ: 26°. 

Окружность, вписанная в многоугольник

Основные свойства и формулы	**Условие задач**
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник — описанным около этой окружности. 	Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника. Ответ:22 
Центром вписанной в четырехугольник окружности является точка пересечения биссектрис (если она биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке).	Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности. Ответ:1,5 
В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.	Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 1. Ответ:2
Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.	Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат со стороной 4. Ответ:2
	Найдите сторону квадрата, описанного около окружности радиуса 4. Ответ:8

Окружность, описанная около четырехугольника

Основные свойства и формулы	**Условие задач**
Если вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник — вписанным в эту окружность. 	Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 105, угол CAD равен 35. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах. Ответ: 70° 
Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.	Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{8}$. Ответ: 4
В любом четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма противоположных углов равна 180°.	Углы A, B и C четырехугольника ABCD относятся как 1 : 2 : 3. Найдите угол D, если около данного четырехугольника можно описать окружность. Ответ дайте в градусах. Ответ: 90 °.
Если в трапецию вписана окружность, то сумма оснований равна сумме боковых сторон, а средняя линия — полусумме боковых сторон: $a+b=c+d$, $m=\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$.	Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 82º и 58º. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах. Ответ: 122°. 

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Во всяком четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений длин противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей:
$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

</td>
<td>Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найдите высоту трапеции.
Ответ: 7.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону трапеции.
Ответ: 6.

</td>
</tr>
</table>

Задачи для самостоятельного решения

1.Две касающиеся внешним образом в точке *K* окружности, радиусы которых равны 36 и 45, вписаны в угол с вершиной *A*. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку *K*, пересекает стороны угла в точках *B* и *C*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*.

Ответ:182,25

2. Окружности радиусов 22 и 99 касаются внешним образом. Точки *A* и *B* лежат на первой окружности, точки *C* и *D* — на второй. При этом *AC* и *BD* — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми *AB* и *CD*. Ответ:72

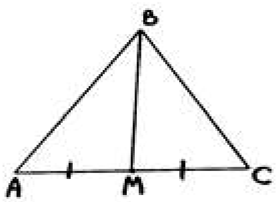
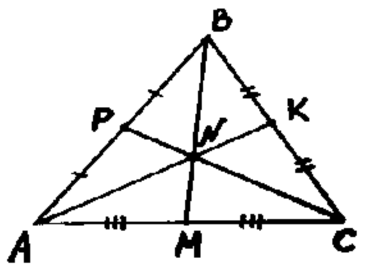
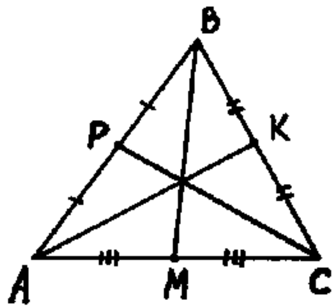
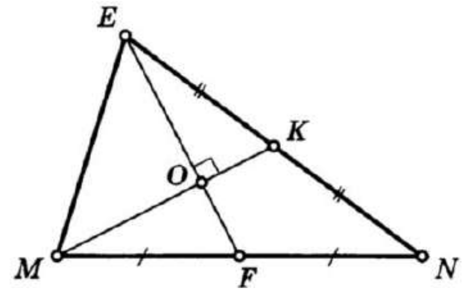
3. В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *B*, проведена биссектриса угла *A*. Известно, что она пересекает серединный перпендикуляр, проведённый к стороне *BC* в точке *K*. Найдите угол *BCK*, если известно, что угол *ACB* равен 40. Ответ: 25^0

4. Окружность радиуса 4 касается внешним образом второй окружности в точке B. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку B , пересекается с некоторой другой их общей касательной в точке A . Найдите радиус второй окружности, если AB=6. Ответ: 9

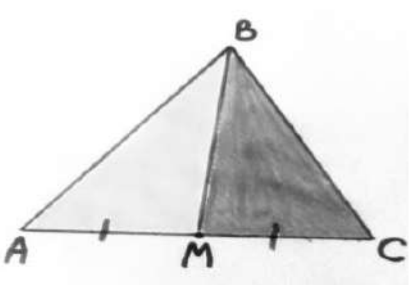
5. Две касающиеся внешним образом в точке *K* окружности, радиусы которых равны 16 и 48, вписаны в угол с вершиной *A*. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку *K*, пересекает стороны угла в точках *B* и *C*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*. Ответ: 32

4.4 Тема: «Медиана треугольника»

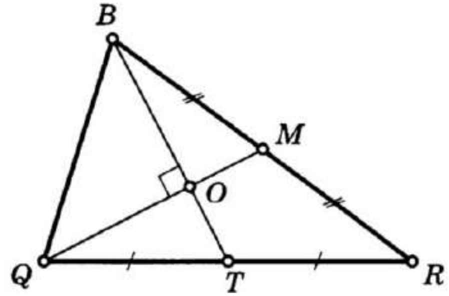
«Медиана треугольника»

Основные свойства и формулы	Условие задач
Медиана треугольника (лат. mediāna — средняя) – это отрезок соединяющий вершины треугольника с серединой противоположной стороны. Отрезок BM – медиана треугольника ABC 	Медиана равностороннего треугольника равна $9\sqrt{3}$. Найти сторону этого треугольника. Ответ: 18.
Треугольник имеет три стороны, а значит и медиан у него – три. BM, AK, CP – медианы треугольника ABC. 	В треугольнике ABC известно, что AC = 54, BM– медиана, BM = 43. Найти AM. Ответ: 27.
Три медианы пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2:1, считая от вершины $\left(\frac{AN}{NK}=\frac{BN}{MN}=\frac{CN}{PN}=\frac{2}{1}\right)$ 	В треугольнике MEN известно, что EF=18, MK=15. Найти NK. Ответ: 13. 

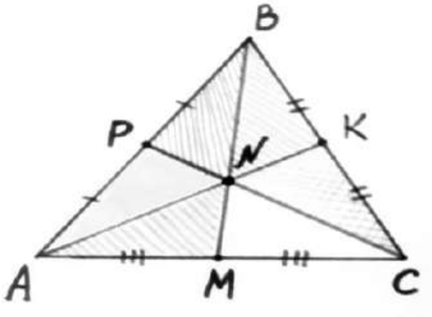
<table>
<tr>
<td>
Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника $(S_{AMB} = S_{MBC})$.



</td>
<td>
В треугольнике BQR известно, QM=9, BT=12. Найти площадь треугольника BOQ.
Ответ: 24.

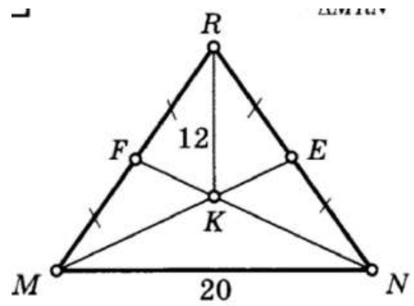


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Все медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников $(S_{APN} = S_{BPN} = S_{BKN} = S_{CKN} = S_{CMN} = S_{AMN})$

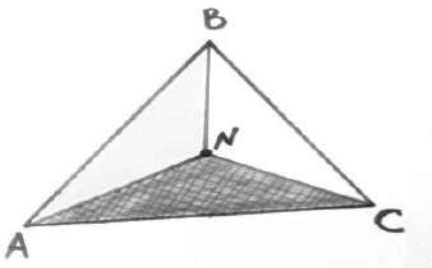


</td>
<td>
В треугольнике RMN проведены медианы ME и NF. Также известно, что RK=12, MN=20, $MF = FR = RE = EN$.
Найти площадь треугольника MRN.

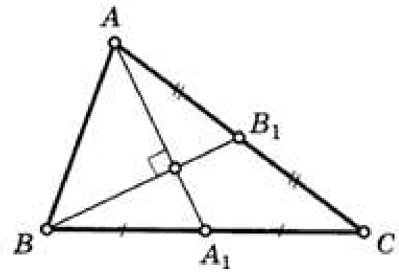
Ответ: 180.



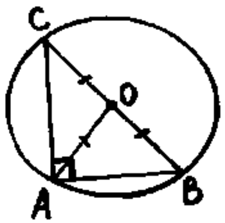
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Если точку пересечения медиан треугольника соединить отрезками с вершинами треугольника, то треугольник разделится на три равновеликих $(S_{ABN} = S_{BCN} = S_{ACN})$



</td>
<td>
В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Также известно, что AA_1=12, BB_1=9. Найти AB.
Ответ: 10



</td>
</tr>
</table>

Если a, b,c – длины сторон треугольника ABC, то длины его медиан m_a, m_b, m_c можно вычислить по формулам: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$	Центром окружности описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.
Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, равна половине гипотенузы и является радиусом окружности, описанной около этого треугольника $(OA=OB=OC=R)$ 	Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы.

Задачи для самостоятельного решения

1. В равнобедренном треугольнике основание равно $\sqrt{21}$, угол при основании 30^0. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне. Ответ: 3,5.

2. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6 см, боковые стороны AB и BC равны 5 см. Найти расстояние между точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрис треугольника. Ответ: $\frac{1}{6}$ см.

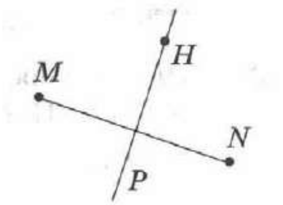
3. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит периметр треугольника на две части длиной 15см и 6 см. Найти длины сторон треугольника. Ответ:10 см; 10 см; 1 см.

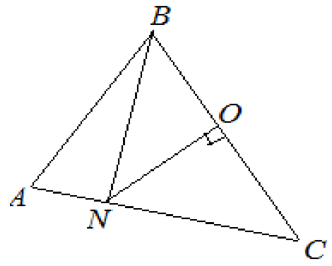
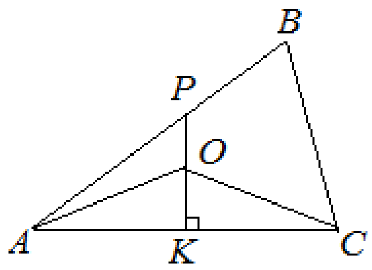
4. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти длину гипотенузы этого треугольника. Ответ: 10.

5. В треугольнике ABC точки K и N – середины сторон AB и AC соответственно. Через вершину B проведена прямая, которая пересекает сторону AC в точке F, а отрезок KN в точке L так, что KL:LN=3:2. Определить площадь четырехугольника AKLF, если площадь треугольника ABC равна 40. Ответ: 9.

6. Стороны треугольника равны 3, 4 и 5. Определить площади треугольников, на которые разбивается данный треугольник высотой и медианой, проведенными к большей по величине стороне. Ответ: 2, 16; 3; 0,84.

4.5 Тема: «Серединный перпендикуляр»

Основные свойства и формулы	Условие задач
Серединный перпендикуляр (срединный перпендикуляр) — прямая, перпендикулярная к данному отрезку и проходящая через его середину.	Точка М лежит внутри угла АОС и находится на одинаковом расстоянии от сторон угла, угол АОС равен 82^0 . Найдите угол МОС. Ответ: 41
Точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку тогда и только тогда, когда она равноудалена от концов отрезка.	PH – серединный перпендикуляр к отрезку MN, MH равен 6, MN равен 8. Найдите периметр треугольника MNH. Ответ: 20 
Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.	В окружности с центром О проведены взаимно перпендикулярные хорды МК и КН, МК не равно КН. Точка А – середина хорды МК, а точка С – середина хорды КН. Укажите верные утверждения: 1) КО – биссектриса угла МКН. 2) ОА=ОС 3) ОА – серединный перпендикуляр к отрезку МК 4) ОК равно ½ МН. Ответ: 34

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника (или другого описываемого окружностью многоугольника) пересекаются в одной точке — центре описанной окружности. У остроугольного треугольника эта точка лежит внутри, у тупоугольного — вне треугольника, у прямоугольного — на середине гипотенузы.	В ABC треугольнике серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает сторону AC в точке N. Найти AN, если BN = 6 см, а AC = 9 см. Ответ: 3 см 
В равнобедренном треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины угла с равными сторонами, совпадают и являются серединным перпендикуляром, проведённым к основанию треугольника, а два других серединных перпендикуляра равны между собой	В треугольнике ABC из точки K стороны AC провели серединный перпендикуляр, который пересекает сторону AB в точке P. На отрезке PK взяли точку O так, что OK = 3 см. Найти периметр треугольника AOC, если AC = 8 см. Ответ: 18 см 
Отрезки серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, заключённые внутри него, можно найти по следующим формулам: $p_a = \frac{2aS}{(a^2+b^2-c^2)}$; $p_b = \frac{2bS}{(a^2+b^2-c^2)}$; $p_c = \frac{2cS}{(a^2-b^2+c^2)}$; где нижний индекс обозначает сторону, к которой проведен перпендикуляр, S – площадь треугольника, а также предполагается, что стороны связаны неравенствами $a >> b >> c$. Если стороны треугольника удовлетворяют неравенствам $a >> b >> c$, тогда справедливы равенства $p_a >> p_b; p_c >> p_b$. Иными словами, у треугольника наименьший серединный перпендикуляр относится к среднему отрезку.	Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите: AD и CD, если BD = 5 см, AC = 8,5 см. Ответ: CD = 5 см, AD = 3,5 см.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из середины гипотенузы восставлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении $2:5$ (меньшая часть – при гипотенузе). Найдите этот угол. Ответ: 70°

2. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 10$. Из середины D стороны AB проведён перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения со стороной BC в точке E. Периметр треугольника ABC равен 40. Найдите периметр треугольника AEC. Ответ: 25

3. Точки A, B и C лежат на прямой m, а точки D и E на ней не лежат. Известно, что AD = AE и BD = BE. Докажите, что CD = CE.

4. Серединные перпендикуляры к диагоналям BD и AC вписанного четырёхугольника ABCD пересекают сторону AD в точках X и Y соответственно. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от прямых BX и CY .

5. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырёхугольника ABCD. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P. (Подсказка: Докажите, что точка P равноудалена от концов отрезка MN.)

6. В выпуклом четырёхугольнике, описанном около окружности, произведения противоположных сторон равны. Угол между стороной и одной из диагоналей равен 20° . Найдите угол между этой стороной и другой *диагональю*. Ответ: 70°.

5. Геометрия. Стереометрия

Составители:

1. Лихарева Ирина Васильевна учитель математики МБОУ СОШ15 ст. Переясловской Брюховецкого района им . И. Ф. Масловского
2. Короткова Ася Эдиковна учитель математики МАОУ СОШ 3 им. И. К. Серикова, г. Курганинска
3. Мунджишвили Галина Васильевна, учитель математики МБОУ СОШ №2 им.И И.Тарасенко ст. Выселки МО Выселковский район
4. Сухарева Татьяна Викторовна, учитель математики, МБОУ СОШ 3 имени Семена Васильевича Дубинского станицы Березанской, Выселковский район,
5. Бурдюгова Светлана Ивановна, учитель математики, МАОУ СОШ 19, г. Новороссийск
6. Арефьева Елена Николаевна, учитель математики, МБОУ лицей "Технико-экономический" г. Новороссийск
7. Ковтун Ольга Георгиевна, учитель математики МАОУ СОШ 3 им. Пушкина, Брюховецкий район
8. Марич Ольга Ивановна, учитель математики МАОУ СОШ 4, г. Абинск, Абинский район
9. Тихонова Наталья Александровна , учитель математики, МАОУ СОШ№1 им. В. И. Фадеева ст. Калининская
10. Литвиненко Елена Александровна, учитель математики, МАОУ СОШ№1 им. В. И. Фадеева ст. Калининская
11. Гайдашова Валентина Викторовна, учитель математики, МАОУ СОШ№9 им П.К. Жукова, ст. Темиргоевская
12. Боклаг Валентина Николаевна, учитель математики, МОБУ СОШ 10 им. атамана С. И. Белого , г. Сочи

5.1 Расстояния

Расстояние между двумя точками. Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;
2) по формуле $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где $\mathrm{A}((x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ или по теореме Пифагора (пространственной), как диагональ прямоугольного параллелепипеда
   $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, где a, b, c измерения прямоугольного параллелепипеда.

Расстояние от точки до прямой. *Расстояние от точки до прямой*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую. Расстояние от точки до прямой можно вычислить, как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот. При этом если длины сторон треугольника все разные a, b, c (треугольник не равносторонний и не равнобедренный), то высоту треугольника, например, к стороне a можно искать по следующему алгоритму:

1) по теореме косинусов находим косинус угла между сторонами a и b;
2) зная косинус этого угла, используя основное тригонометрическое тождество, найти его синус;
3) синус найденного угла есть отношение искомой высоты к стороне b.
4) в прямоугольном треугольнике высота к гипотенузе равна произведению катетов, деленному на гипотенузу.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Расстояние от точки M до плоскости α:

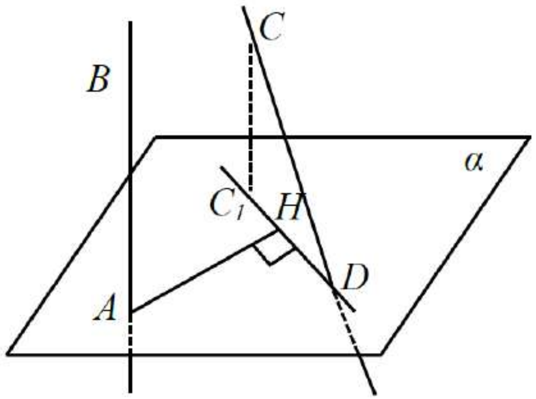
1) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α;
2) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на плоскости β, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α.

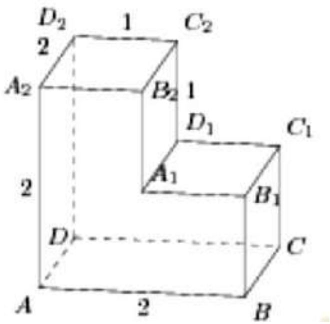
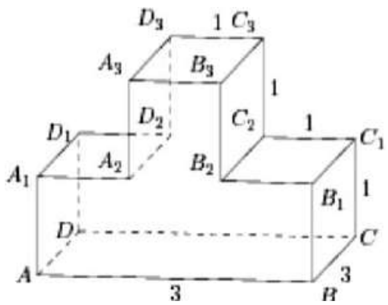
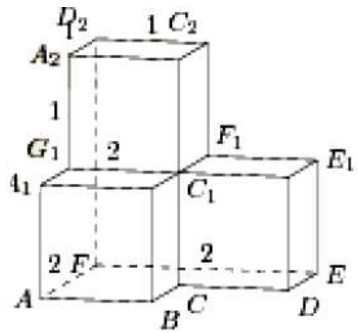
Метод объемов: Если объем пирамиды $ABCS$ равен V_{ABCS}, то расстояние от точки S до плоскости ABC можно найти используя формулу объема пирамиды: $V_{ABCS} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H$, где H – расстояние от точки S до плоскости ABC.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине их общего перпендикуляра, которое равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

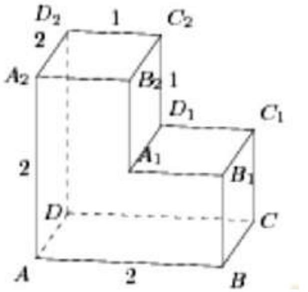
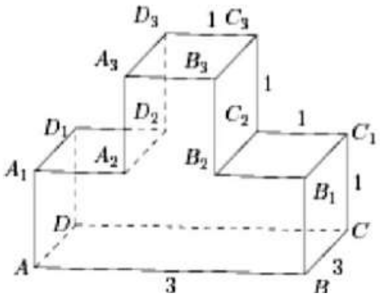
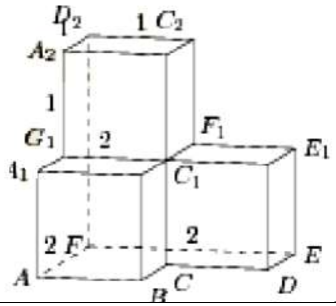
Расстояние между скрещивающимися прямыми. *Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми* равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться одним из приведенных ниже четырех способов.

1) Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.
2) Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.
3) Заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями.
4) Построить плоскость α, перпендикулярную одной из данных прямых AB, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию C_1D второй прямой CD. Тогда искомое расстояние это расстояние от точки A до прямой C_1D, т.е. длина отрезка AH.

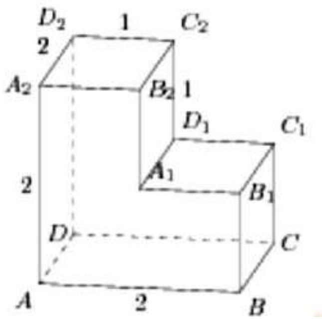
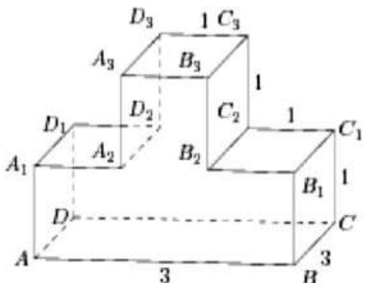
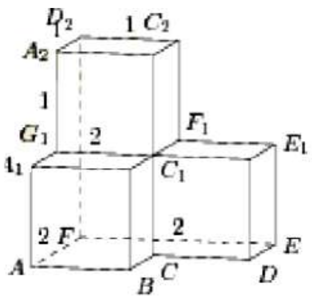


Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние: а) между вершинами A и C_2; б) от вершины D_2 до прямой C_1B_1; в) между прямыми AD и B_1C_1; г) от вершины B до плоскости $(A_2B_2C_2)$; д) между плоскостями (ADD_2)и (BCC_1); е) между прямыми AC и BB_1. 	**1.** Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите квадрат расстояния: а) между вершинами A и C_2; б) от вершины D_2 до прямой C_1B_1; в) между прямыми AD и B_1C_1; г) от вершины B до плоскости $(A_2B_2C_2)$; д) между плоскостями (ADD_1) и (BCC_1); е) между прямыми AC и BB_1. 	**1.** Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние: а) между вершинами A и C_1; б) от вершины D_2 до прямой BC; в) между прямыми AB и FE; г) от вершины B до плоскости $(A_2D_2C_2)$; д) между плоскостями (AFE) и $(A_2D_2C_2)$; е) между прямыми AE и FD_2. 
2. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором AB=10, $AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.	**2.** Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC$ =10, $BC = 4\sqrt{5}$.	**2.** На продолжении ребра SK за точку K правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости MNS равно 24. Найдите длину отрезка KA, если $SL = 2\sqrt{41}$, MN =16.

3. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые ребра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS – точка F так, что $SF = BE = 3$. Плоскость CEF параллельна ребру SB и пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.	**3.** На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке М. Точка M является серединой ребра CC_1. Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.	**3.** В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q – середина ребра A_1B_1, а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении 1 : 2, считая от вершины C_1. Точка M является серединой ребра CC_1. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ.

Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите квадрат расстояния: а) между вершинами B и C_1; б) от вершины C_2 до прямой BC; в) между прямыми AD и B_2C_2; г) от вершины B_1 до плоскости $(A_2D_2C_2)$; д) между плоскостями (ADC) и $(A_2D_2C_2)$; е) между прямыми AD и A_2C_2.  	**1.** Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние: а) между вершинами A_3 и C_1; б) от вершины C_2 до прямой AB; в) между прямыми AD_1 и B_2C_3; г) от вершины B до плоскости $(A_2D_2D_3)$; д) между плоскостями (ADC)и $(A_2D_2C_2)$; е) между прямыми AD и B_2C_3.  	**1.** Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние: а) между вершинами F и C_1; б) от вершины C_2 до прямой AF; в) между прямыми A_2D_2 и DE; г) от вершины B до плоскости $(C_1F_1E_1)$; д) между плоскостями (AFD_2) и $(C_1F_1C_2)$; е) между прямыми DC и FC_2. 
2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 соответственно.	**2.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB1D1$.	**2.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT, где T – середина ребра AD.
3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На ребрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L	**3.** Дана пирамида $SABC$, в которой $SC=SB=AB=AC=\sqrt{17}$, $SA=BC=2\sqrt{5}$. Найдите расстояние между ребрами BC и SA, если ребро SA перпендикулярно ребру BC.	**3.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P – делит сторону AB в отношении 2:3, считая от вершины A, точка K – делит сторону BC в отношении 2:3, считая от вершины C.

соответственно, причем $BK = C_1L = 2$. Плоскость α параллельна прямой BD и содержит точки K и L. Прямая A_1C перпендикулярна плоскости α. Найдите расстояние от точки B до плоскости α .		Через точки P и K параллельно SB проведена плоскость α. Сечением пирамиды плоскостью α является прямоугольник. Найдите расстояние от точки S до плоскости α, если известно, что SC = 5, AC = 6.

Вариант 7	**Вариант 8**	**Вариант 9**
1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние: а) между вершинами A_2 и C_1; б) от вершины D_2 до прямой AB; в) между прямыми AD и B_2C_2; г) от вершины A до плоскости ($A_2B_2C_2$); д) между плоскостями (ADD_2) и ($A_1B_2C_2$); е) между прямыми AD и D_1B_1. 	**1.** Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние: а) между вершинами A_2 и D_3; б) от вершины C_3 до прямой AD; в) между прямыми AD_1 и BC_1; г) от вершины A_3 до плоскости ($A_2D_2D_1$); д) между плоскостями ($A_3D_3D_2$) и (A_1D_1D); е) между прямыми A_1D_1 и D_3B_3. 	**1.** Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите квадрат расстояния: а) между вершинами G_1 и C_2; б) от вершины D_2 до прямой DE; в) между прямыми A_2C_2 и CE; г) от вершины G_1 до плоскости (CDE); д) между плоскостями (BCC_1) и (A_2D_2F); е) между прямыми AE и D_2F. 
2. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $2\sqrt{10}$; высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки $C1$ до плоскости BCM, где M – середина ребра A_1C_1.	**2.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D – середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.	Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$ высота равна $\sqrt{31}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

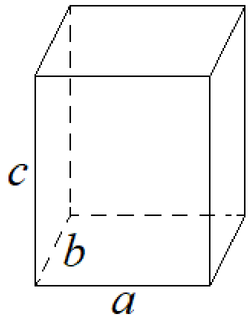
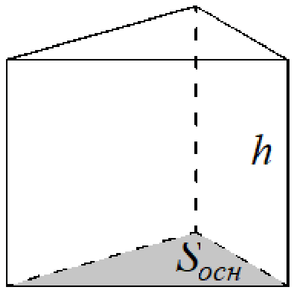
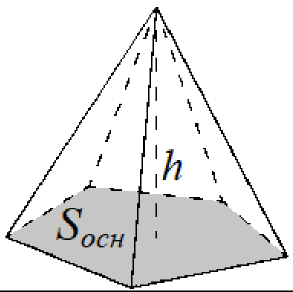
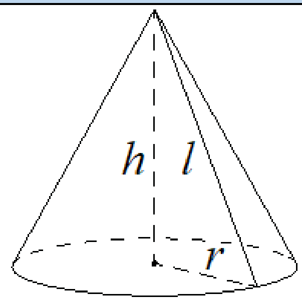
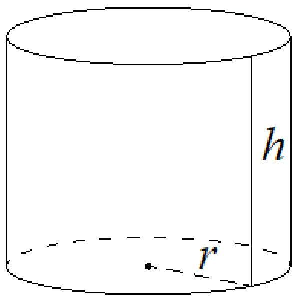
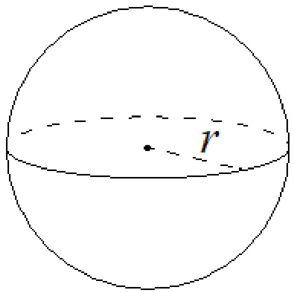
3. Основание пирамиды *DABC* – прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Высота пирамиды проходит через середину ребра *AC*, а боковая грань *ACD* – равносторонний треугольник. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро *BC* и произвольную точку *M* ребра *AD*, – прямоугольный треугольник. Найдите расстояние от вершины *D* до этой плоскости, если *M* – середина ребра *AD*, а высота пирамиды равна 6.	**3.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 отмечена точка *M* так, что $A_1C_1 = C_1M$, а на продолжении отрезка B_1C за точку *C* отмечена точка *N* так, что $B_1C=CN$. Известно, что $MN=MB_1$. Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и *MN*.	**3.** В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 8, а боковое ребро *SA* равно 10. На рёбрах *CD* и *SC* отмечены точки *N* и *K* соответственно, причём DN:NC=SK:KC=1:7 Плоскость α содержит прямую *KN* и параллельна прямой *BC* и делит ребро *SB* в отношении 1:7, считая от вершины *S*. Найдите расстояние между прямыми *SA* и *KN*.

ОТВЕТЫ

	ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2	ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4	ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6	ВАРИАНТ 7	ВАРИАНТ 8	ВАРИАНТ 9
1.	а) 3 б) $\sqrt{5}$ в) $\sqrt{5}$ г) 2 д) 2 е) $\sqrt{2}$	а) 14 б) 4 в) 10 г) 1 д) 9 е) 4,5	а) $\sqrt{3}$ б) $\sqrt{5}$ в) 2 г) 2 д) 2 е) $\sqrt{2}$	а) 5 б) 5 в) 5 г) 1 д) 4 е) 4	а) $\sqrt{14}$ б) $\sqrt{10}$ в) 2 г) 2 д) 1 е) 2	а) $\sqrt{3}$ б) $\sqrt{5}$ в) $2\sqrt{2}$ г) 1 д) 1 е) 1	а) 3 б) $2\sqrt{2}$ в) $\sqrt{5}$ г) 2 д) 1 е) 1	а) $\sqrt{10}$ б) $2\sqrt{2}$ в) 3 г) 1 д) 1 е) 1	а) 3 б) 8 в) 4 г) 1 д) 1 е) 2
2.	8	2	$3\sqrt{41}$	12	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	2	$\frac{3\sqrt{13}}{13}$	3
3.	$\frac{2\sqrt{15}}{7}$	$\frac{12\sqrt{26}}{13}$	$\frac{32\sqrt{57}}{57}$	$\frac{2\sqrt{10}}{5}$	$\sqrt{7}$	$\frac{9\sqrt{39}}{25}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{357}}{21}$

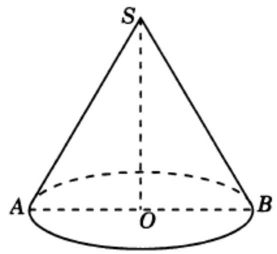
5.2 Площади поверхностей и объёмы тел

Справочная информация

Прямоугольный параллелепипед		Прямая призма	
	$V = abc$		$V = S_{осн}\, h$
Пирамида		**Конус**	
	$V = 1/3\ S_{осн}\, h$		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $S_{бок} = \pi r l$
Цилиндр		**Шар**	
	$V = \pi r^2 h$ $S_{бок} = 2\pi r h$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $S = 4\pi r^2$

Тип 1 (базовый уровень)

1. Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей – 10. Найдите объем конуса. В ответе запишите $\frac{v}{\pi}$.



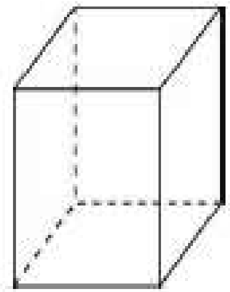
Решение:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$r = 6 \;\; h = 8 \;\; V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$

Ответ: 96.

2. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 8. Найдите объем параллелепипеда.



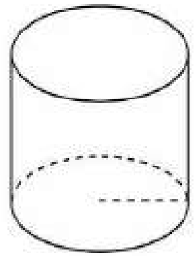
Решение:

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$

Ответ:160

3. Радиус основания цилиндра равен 4, высота $\frac{10}{\pi}$. Найдите объем цилиндра.



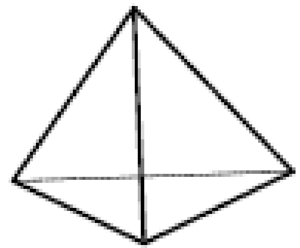
Решение:

$V = \pi r^2 h$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{10}{\pi} = 160$$

Ответ:160

4. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 3. Найдите объем пирамиды, если её высота равна 9.



Решение:

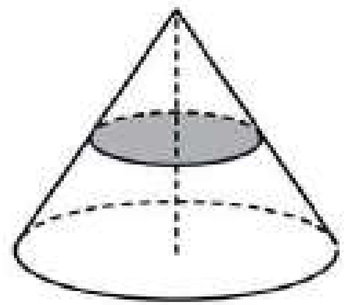
$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 18$

Ответ:18

5. Объем конуса равен 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту конуса пополам. Найдите объем отсеченного конуса.



Решение:

Способ 1

Линейные размеры большого конуса r и h. Линейные размеры маленького конуса $\frac{r}{2}$ и $\frac{h}{2}$.

$\frac{1}{3}\pi r^2 = 12 \qquad\qquad \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = V_{\text{м}}$

Преобразуем:

$\pi r^2 = 36 \qquad\qquad \frac{1}{24}\pi r^2 = V_{\text{м}}$

Подставим:

$\frac{1}{24} \cdot 36 = V_{\text{м}}$

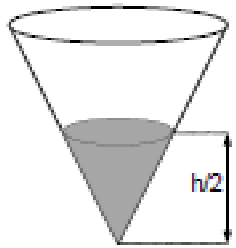
$V_{\text{м}} = 1{,}5$

Ответ: 1,5

Способ 2

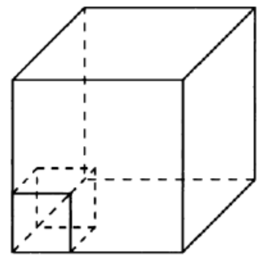
Подсказка:
При изменении всех линейных размеров тела в k раз, объем этого тела изменяется в k^3 раз.
$k = 2 \quad k^3 = 8 \;\; V = \frac{12}{8} = 1{,}5$
Ответ:1,5

Данный прием решения задач не требует знания формулы объема конуса.



6. Коническая воронка объемом 16 литров полностью заполнена жидкостью. Из воронки вычерпали часть жидкости, при этом ее уровень снизился до половины высоты воронки. Сколько литров жидкости вычерпали?

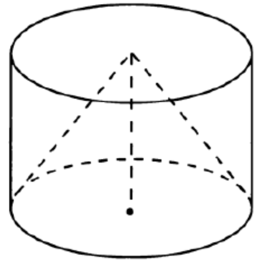
Решение:
$$k = 2 \quad k^3 = 8 \;\; V = \frac{16}{8} = 2$$
Найдем, сколько литров жидкости вычерпали:
16-2=14
Ответ:14



7. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 108. Чему будет равен объём параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в три раза?

Решение:
$$k = 3 \quad k^3 = 27 \;\; V = \frac{108}{27} = 4$$
Ответ: 4

8. Объём цилиндра равен 30. Чему равен объём конуса с таким же основанием и высотой?



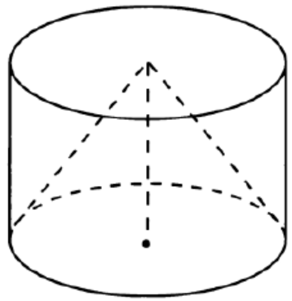
Подсказка*:*
Если цилиндр и конус имеют общее основание и высоту, то $\boldsymbol{V_k = \frac{1}{3} V_{ц}}$

Решение:

$V_k = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$

Ответ:10

9. Объём конуса равен 25. Чему равен объём цилиндра с таким же основанием и высотой?



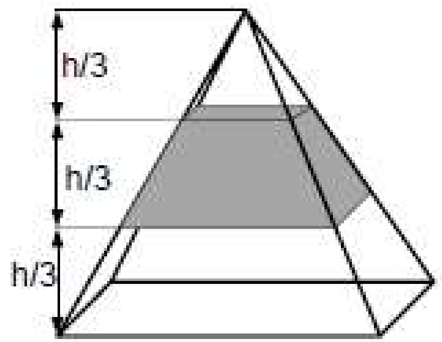
Решение:

$25 = \frac{1}{3} V_{ц}$

$V_{ц} = 75$

Ответ:75

Тип 2 (повышенный уровень)



1. Четырехугольная пирамида весом 81 горизонтальными плоскостями разрезана на 3 части одинаковой высоты. Найдите вес средней части пирамиды.

Решение:
При решении данной задачи можно использовать подсказку из задачи №5 типа 1.
Найдем массу части пирамиды состоящей из двух частей (верхняя и средняя):

$k=\frac{2}{3}\quad k^3=\frac{8}{27}\quad m=81\cdot\frac{8}{27}=24$

Найдем массу верхней части пирамиды

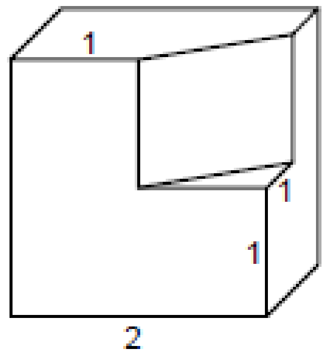
$k=\frac{1}{3}\quad k^3=\frac{1}{27}\quad m=81\cdot\frac{1}{27}=3$

Найдем вес средней части пирамиды:

24-3=21

Ответ: 21

2. Найдите объем части куба



Решение:
Для того чтобы найти объем части куба. Необходимо из объема всего куба вычесть объем призмы в основании которой лежит равнобедренный прямоугольный треугольник.

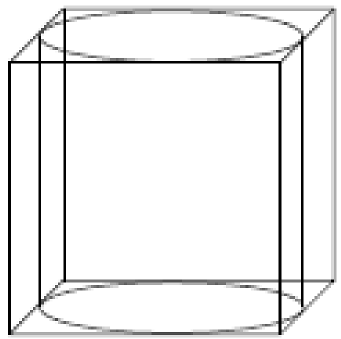
$V_k=2^3=8$

$V_{п}=S_{осн}h=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=0{,}5$

$V_{ч}=8-0{,}5=7{,}5$

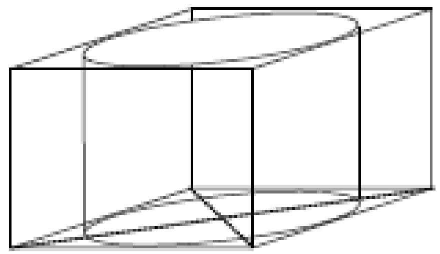
Ответ: 7,5

3. Куб описан около цилиндра объемом 16 π. Найдите объем куба.



Решение:
Так как цилиндр вписан в куб, то диаметр цилиндра и высота равны ребру куба.
$V_k = a^3$
Для цилиндра $h = a, r = \frac{a}{2}$ $\quad V = \pi \frac{a^2}{4} \cdot a = \frac{1}{4}\pi a^3$
$16\pi = \frac{1}{4}\pi a^3$ $\quad a^3 = 64$ $\; V_k = 64$
Ответ: 64

4. Основанием прямой призмы является ромб с диагоналями 2 и 6. Найдите объем цилиндра, вписанного в эту призму, если объем призмы равен $\frac{3}{\pi}$.



Решение:
Задача многоэтапная и требует знание не только формул объемов тел.

$V_ц = \pi r^2 h \quad r_ц - ? \quad h_ц - ?$
$1. h_ц = h_п$

$$h_п = \frac{V_п}{S_{осн}}$$

$$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$$
$$h_п = \frac{3}{\pi} : 6 = \frac{1}{2\pi}$$

$h_{ц} = \frac{1}{2\pi}$

2. $r_{ц} = \frac{1}{2} h_{осн}$

$h_{осн} = \frac{S_{осн}}{a_{осн}}$, где $a_{осн} = \sqrt{10}$ по теореме Пифагора

$h_{осн} = \frac{6}{\sqrt{10}}$

$r_{ц} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

3. $V_{ц} = \pi \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{9}{20}$=0,45

Ответ: 0,45

5. Объем раствора в гальванической ванне равен 3 куб. м, при этом уровень раствора достигает высоты 75 см. В ванну погрузили деталь, после чего уровень раствора поднялся на 2 см. Найдите объем детали (в куб. м).

Решение:

За основу берется формула $V = S_{осн} \cdot h$

Объем раствора в гальванической ванне можно найти по формуле: $3 = S_{осн} \cdot 75$

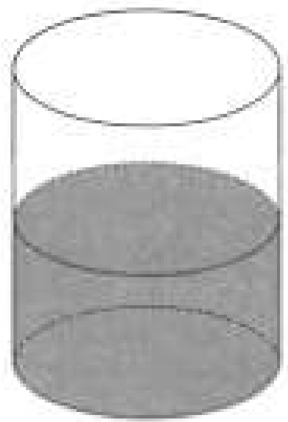
Объем детали погруженную в эту же ванную находим по этой же формуле: $V_{д} = S_{осн} \cdot 2$

Сделаем необходимые преобразования:

Из первой формулы $S_{осн} = \frac{1}{25}$ и подставим во вторую $V_{д} = \frac{1}{25} \cdot 2 = \frac{2}{25} = 0{,}08$

Ответ: 0,08

6. В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 20 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3



Решение:

При решении данной задачи можно воспользоваться утверждением: Объем налитой воды в сосуд прямо пропорционален уровню (высоте) воды в данном сосуде, при условии, что $S_{\text{осн}}$ величина постоянная.

3000 см^3 – 20 см

x см^3 - 3 см

x = (3000·3):20

x = 450

Ответ:450

7. Радиус основания цилиндра увеличили в 3 раза, а его высоту уменьшили в 3,6 раза. Во сколько раз увеличится объем цилиндра?

Решение:

Решение данной задачи сводится к работе с формулами.

Измерение первого цилиндра

r и h

$V_1 = \pi r^2 h$

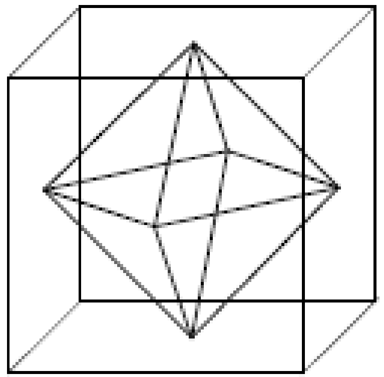
Измерения второго цилиндра

$3r$ и $\frac{5}{18}h$

$V_2 = \pi 9 r^2 \frac{5}{18} h$

Найдем отношение $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi 9 r^2 \frac{5}{18} h}{\pi r^2 h}$

$$\frac{V_2}{V_1} = 2{,}5$$
Ответ: 2,5



8. Вершины многогранника являются центрами граней куба. Найдите объем куба, если объем многогранника равен 12.

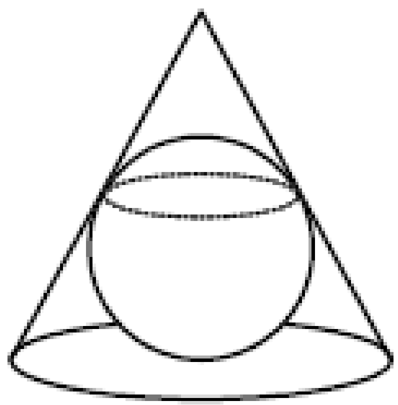
Решение:
Обозначим ребро куба через a.

Многогранник составлен из двух равных пирамид имеющих общее основание.
$V_{м} = 2 \cdot V_{п}$, то есть

$V_{м} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h_{п}$, где $h_{п} = \frac{a}{2}$, а $S_{осн} = \frac{a^2}{2}$, где сторона основания равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
Подставим в формулу $V_{м} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h_{п}$

$$12 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2}$$
$$12 = \frac{a^3}{6}$$
$$a^3 = 72$$
Так как $V_k = a^3$, то $V_k = 72$
Ответ: 72

9. В конус объемом 36 вписан шар. Найдите объем шара, если осевое сечение конуса является равносторонним треугольником.



Решение:

Использовать будем две формулы: $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$ и $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Так как осевое сечение конуса является равносторонний треугольник со стороной a, то $r_k = \frac{a}{2}$, а $h_k = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда $r_ш = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Подставим в формулу V_k и упростим:

$$36 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3\pi\sqrt{3} = 864$$

Подставим в формулу $V_ш$ и упростим:

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3a^3\sqrt{3}}{216}$$

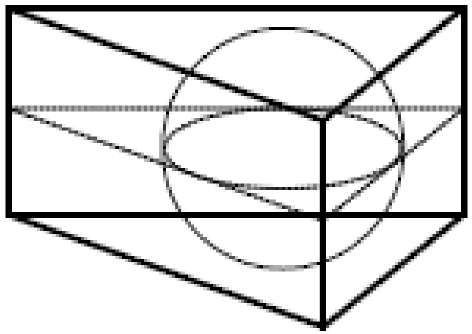
$$V_ш = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{54}$$

Исходя из того, что

$$a^3\pi\sqrt{3} = 864$$

$V_{ш} = \frac{864}{54} = 16$

Ответ:16



10. В правильную треугольную призму объемом $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ вписан шар. Найдите радиус шара.

Решение:

Выразим объем призмы, используя формулу: $V_{п} = S_{осн} \cdot h$, где $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Используем решение предыдущей задачи.

$r_{ш} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$h_{п} = 2r_{ш}$

$h_{п} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Подставим в формулу объема призмы

$\frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$a^3 = 81\sqrt{3}$

$a = 3\sqrt{3}$

Теперь найдем $r_{ш}$:

$r_{ш} = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Ответ: 1,5

Задачи для самостоятельного решения:

I уровень - это задания на 1-2 логических шага в основном репродуктивного характера. Для решения их учащимся достаточно знать правила, определения, теоремы, формулы, простейшие зависимости между компонентами математических действий, элементами геометрических фигур.

II уровень – включает более сложные задания на 2-4 логических шага; для их решения требуется более широкий круг математических знаний, умений и практических навыков.

I уровень

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4 $\sqrt{3}$ см, а высота её основания равна $2\sqrt{3}$ см . Вычислить объём пирамиды.

2. Осевое сечение цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $4\sqrt{2}$ см. Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π .

3. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна 8 см, а её боковое ребро равно 10 см. Вычислить объём призмы.

4. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 10 см, а диагональ её основания равна 6 см. Вычислить объём пирамиды.

5. Осевое сечение конуса – правильный треугольник , сторона которого равна $4\sqrt{3}$ см. Вычислить отношение объёма конуса к числу π .

6. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см , а её боковое ребро $2\sqrt{3}$ см . Вычислить объём призмы.

7. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см , а её высота равна $5\sqrt{3}$ см .Вычислить объём пирамиды.

8. Осевое сечение цилиндра является квадрат, площадь которого равна 64 см. Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π.

9. В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 12 ,10 см. Высота пирамиды равна 8 см. Вычислить объём пирамиды.

10. В основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 12 и 16 см. Высота пирамиды равна 20 см. Вычислить объём пирамиды.

11. Высота правильной треугольной призмы равна $4\sqrt{3}$ см, а радиус окружности , описанной около её основания ,равен $2\sqrt{3}$ см .Вычислить объём призмы.

12. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого 8 см, а высота, проведённая к нему, 5 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 12 см.

13. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник, основание которого 12 см, а высота, проведённая к нему , 8 см .Длина бокового ребра призмы равна 10 см .Вычислить объём призмы.

14. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 и 6 см. Высота пирамиды равна 10 см. Вычислить объём пирамиды.

15. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 ,14 и 15 см. Высота пирамиды равна 10 см. Вычислить объём пирамиды.

16. В основании прямой призмы лежит прямоугольник, стороны которого 8 и 6 см. Боковое ребро призмы равно 10 см. Вычислить объём призмы.

17. В основании пирамиды лежит прямоугольник, стороны которого равны 8 и10 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 12 см.

18. В основании призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. Высота призмы равна 10 см. Вычислить объём призмы.

19. Длина основания цилиндра равна 12π см, а его высота равна 10 см. Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π.

20. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 10 см .Вычислить объём пирамиды ,если её высота равна $10\sqrt{3}$ см.

21. В основании прямой призмы лежит ромб, диагонали которого равны 6 и 8 см. Боковое ребро призмы равно 20 см. Вычислить объём призмы.

22. В основании пирамиды лежит ромб. Основанием высоты является точка пересечения диагоналей ромба, которая удалена от его вершин на расстоянии 4 и 3 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 10 см.

23. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 10 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 30 см.

24. В основании пирамиды лежит ромб, сторона которого равна 8 см, а его высота - 6 см . Высота пирамиды равна 10 см. Вычислить объём пирамиды.

25. В основании пирамиды лежит треугольник, одна из сторон которого равна 8 см, а высота, проведённая к ней - 5 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 12см.

26. В основании пирамиды лежит ромб, сторона которого равна 8 см. Основанием высоты является центр окружности, вписанной в её основание; радиус этой окружности равен 5 см. Высота пирамиды 12 см .Вычислить объём пирамиды.

27. В основании прямой призмы лежит треугольник, сторона которого равна 12 см, а высота, проведённая к ней - 5 см .Боковое ребро призмы равно 8 см .Вычислить объём призмы.

28. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник. Все боковые рёбра пирамиды равны. Основание высоты пирамиды удалено от катетов этого треугольника на 3 и 4 см .Высота пирамиды равна 10 см .Вычислить объём пирамиды.

29.В основании пирамиды лежит ромб, диагонали которого равны 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 16 см. Вычислить объём пирамиды.

30. Высота правильной четырёхугольной призмы равна 10 см , а радиус окружности , описанной около основания ,равен $5\sqrt{2}$ см .Вычислить объём призмы.

ОТВЕТЫ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	16	640	60	24	24	45	128	320	640
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
108	80	480	80	280	480	320	240	360	250
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
480	80	1000	160	80	320	240	80	128	1000

II уровень

1. В правильной треугольной призме радиус окружности описанной около основания , равен 2см , а диагональ боковой грани равна $2\sqrt{15}$ см .Вычислить объём призмы.

2. В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна 5 см ,а радиус окружности , описанной около основания , равен $4\sqrt{2}$ см .Вычислить объём пирамиды .

3. В цилиндре на расстоянии 4 см от его оси и параллельно к ней проведено сечение , диагональ которого равна $6\sqrt{5}$ см .Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π , если это сечение пересекает основание по хорде ,равной 6 см .

4. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ,сторона основания которого равна 12 см .Основанием высоты пирамиды является середина стороны данного треугольника .Наибольшее боковое ребро равно $10\sqrt{3}$ см .Вычислить объём пирамиды .

5. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого равно 6 см, а высота, проведённая к ней 4 см. Основанием высоты пирамиды является вершина данного треугольника, которая противоположна его основанию. Большее боковое ребро равно 13 см. Вычислить объём пирамиды.

6. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 5 см и диагональю 8 см. Вычислить объём призмы, если диагональ боковой грани равна 13 см.

7. Основанием пирамиды является ромб, площадь которого равна $600см^2$, а сторона – 25 см .Высоты всех боковых граней равны 15 см. Вычислить объём пирамиды.

8. Высота правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$ см. Апофема (высота боковой грани) равна $\sqrt{6}$ см. Вычислить объём пирамиды.

9. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катет которого равен 6 см, а радиус, описанной вокруг него окружности 5 см. Все боковые рёбра пирамиды равны 13 см. Вычислить объём пирамиды.

10. В нижнем основании цилиндра хорда, которая равна 6 см, удалена от его оси на 4 см. Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π, если расстояние от центра верхнего основания до конца этой хорды равно 13 см.

11. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и медианой, проведённой к основанию, 8 см. Вычислить объём призмы, если диагональ большей грани равна 13 см.

12. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанной в основание окружности равен $\sqrt{3}$ см ,а апофема $\sqrt{51}$ см .Вычислить объём пирамиды .

13. В цилиндре на расстоянии 4 см от его оси и параллельно ей проведено сечение , диагональ которого $6\sqrt{5}$ см .Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π ,если его радиус 5 см .

14. В основании пирамиды лежит прямоугольник, стороны которого 6 и 8 см. Все боковые рёбра пирамиды равны 13 см. Вычислить объём пирамиды.

15. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, в котором высота, проведённая к его основанию, равна 8 см, а радиус окружности, вписанной в него ,3 см. Высоты всех боковых граней пирамиды равны 5 см. Вычислить объём пирамиды.

16. В правильной четырёхугольной призме радиус окружности ,описанной около основания ,равен $10\sqrt{2}$ см .Диагональ боковой грани 25 см .Вычислить объём призмы .

17. В правильной четырёхугольной призме диагональ её равна 9 см ,а диагональ боковой грани $\sqrt{65}$ см .Вычислить объём призмы.

18. В основании прямой призмы лежит прямоугольная трапеция с основаниями 9 и 14 см и большей боковой стороной 13 см. Вычислить объём призмы, если меньшая её диагональ 25 см.

19. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катет которого15 см, а гипотенуза 25 см. Высоты всех боковых граней пирамиды равны 13 см. Вычислить объём пирамиды.

20. В основании пирамиды лежит правильный треугольник, сторона которого 8 см. Основание высоты попадает на середину стороны данного треугольника .Наибольшее боковое ребро равно$4\sqrt{6}$ см .Вычислить объём пирамиды .

21. В правильной четырёхугольной пирамиде радиус окружности, вписанной в основание, равен 4 см, а апофема 5 см. Вычислить объём пирамиды.

22. В правильной треугольной пирамиде радиус описанной около основания окружности равен $2\sqrt{3}$ см .Вычислить объём пирамиды ,если её боковое ребро равно $2\sqrt{15}$ см .

23. В цилиндре на расстоянии 4 см от его оси и параллельно ей проведено сечение , диагональ которого равна $6\sqrt{5}$ см .Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π , если его высота 12 см .

24. В основании пирамиды лежит прямоугольник, одна из сторон которого равна 8 см. Все боковые рёбра пирамиды равны 13 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота 12 см.

25. В основании пирамиды лежит правильный треугольник, сторона которого 6 см. Основанием высоты является вершина этого треугольника .Высота большей боковой грани равна $5\sqrt{3}$ см .Вычислить объём этой пирамиды .

26. В основании прямой призмы лежит прямоугольник со стороной 6 см и радиусом описанной окружности 5 см. Вычислить объём призмы, если её диагональ равна 26 см.

27. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого 12 см, а боковая сторона 10 см. Высоты всех боковых граней 5 см. Вычислить объём пирамиды.

28. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см , а апофема -$\sqrt{51}$ см .Вычислить объём пирамиды .

29. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 15 и 20 см. Высоты всех боковых граней равны 13 см. Вычислить объём пирамиды.

30. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 10 см. Вычислить объём призмы, если диагональ меньшей боковой грани равна 26 см.

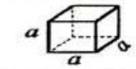
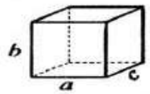
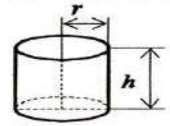
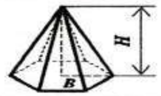
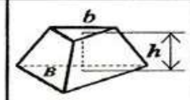
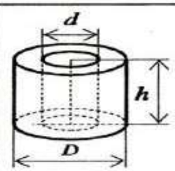
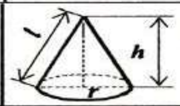
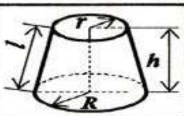
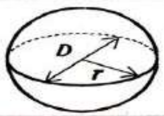
ОТВЕТЫ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	64	300	288	48	288	1800	9	24	300
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
240	18	300	192	64	6000	112	2760	600	64
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
64	36	300	192	36	1152	64	36	600	1152

5.3 Поверхности геометрических тел

Справочная информация

Объемы и поверхности геометрических тел

Название	Изображение	Объем	Полная поверхность
1	2	3	4
Куб		$V=a^3$	$S=6a^2$
Прямоугольный параллелепипед		$V=abc$	$S=2(ab+bc+ac)$
Цилиндр		$V=\pi r^2 h$	$S=2\pi r(r+h)$
Пирамида		$V=\frac{1}{3}BH$	—
Усеченная пирамида		$V=\frac{1}{3}h(B+b+$ $+\sqrt{Bb})$	—
Полый цилиндр		$V=\frac{\pi}{4}h(D^2-d^2)$	—
Конус		$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$S=\pi(r+l)$
Усеченный конус		$V=\frac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)$	$S=\pi(R^2+r^2+$ $+l\cdot(R+r)$
Шар		$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi D^3$	$S=4\pi r^2$

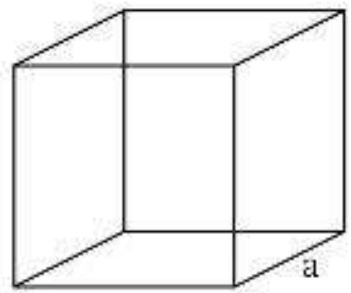
Формула площади поверхности призмы

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна периметру основания умноженному на высоту призмы (высота=боковому ребру).

$$S_{бок} = ph=pl$$

p — периметр основания;
h — высота;
l — боковое ребро.

Формула площади поверхности куба



Площадь боковой поверхности куба равна числу боковых граней умноженному на квадрат ребра.

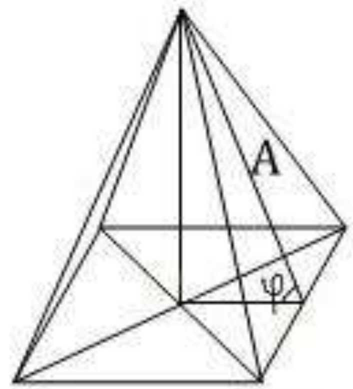
$$S_{бок} = 4a^2$$

Площадь полной поверхности куба равна числу всех граней куба умноженному на квадрат ребра.

$S_{полн.} = 6a^2$,**a** — ребро куба.

Формула площади поверхности пирамиды

1) Правильная пирамида:



$$S_{бок} = 1/2pA$$

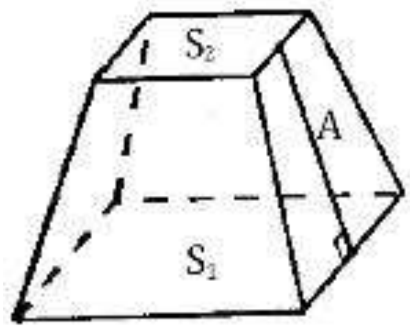
p — периметр основания;
A — апофема.

$$S_{бок} = S/\cos φ$$

S — площадь основания;
φ — угол между боковой гранью и основанием пирамиды.

$$S_{бок} = S_{гр}\, n$$

$S_{гр}$ — площадь одной боковой грани;
n — количество боковых граней пирамиды.
2) Правильная усеченная пирамида:



$$S_{бок} = 1/2(p_1 + p_2)A$$

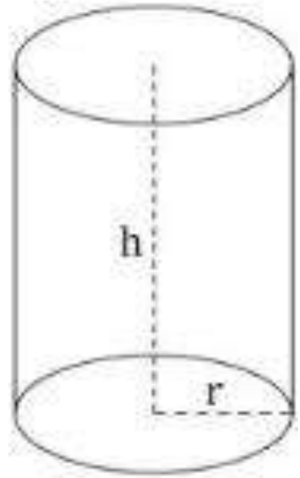
p_1 ,p_2 — периметры оснований;

A — апофема.

$$S_{полн.} = S_{бок} + S_1 + S_2$$

$S_{полн.}$ — площадь полной поверхности правильной усеченной пирамиды;
$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды;
$S_1 + S_2$ — площади оснований.

Формула площади поверхности цилиндра

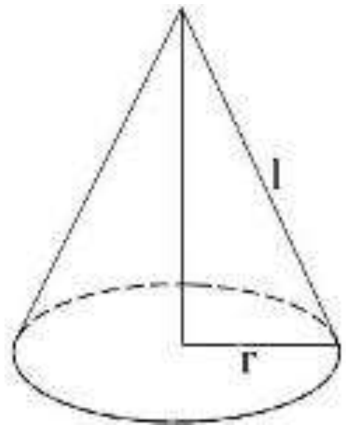


$$S_{бок} = 2\pi rh = \pi dh$$

$$S_{полн.} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r+h)$$

$S_{полн.}$ — площадь полной поверхности цилиндра;
r — радиус цилиндра;
d — диаметр цилиндра;
h — высота цилиндра.

Формула площади поверхности конуса



1) Прямой круговой конус:

$$S_{бок} = \pi rl = 1/2\ \pi dl$$

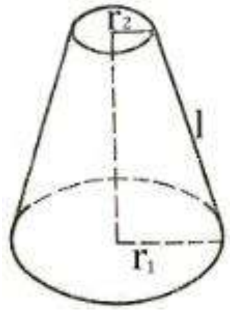
$$S_{полн.} = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r+l)$$

$S_{полн.}$— площадь полной поверхности конуса;
r -радиус конуса;
d -диаметр конуса;

l — образующая конуса.

2) Усеченный прямой круговой конус:

$$S_{бок} = \pi l(r_1 + r_2) = 1/2\pi l(d_1 + d_2)$$



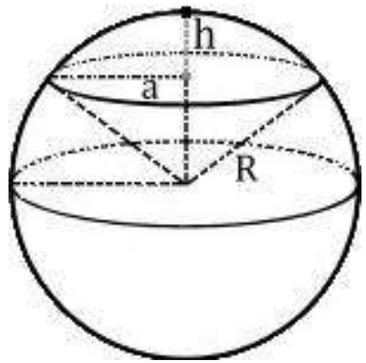
$$S_{полн.} = \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1 + r_2)$$

$S_{полн.}$ — площадь полной поверхности усеченного конуса;
r_1, r_2 — радиусы оснований усеченного конуса;
d_1, d_2 — диаметры оснований усеченного конуса;
l — образующая усеченного конуса.

Формула площади поверхности шара (сферы)

Шар — тело, созданное вращением полукруга вокруг диаметра.
Сфера — поверхность шара.

$$S_{полн.} = 4\pi R^2 = \pi D^2$$



Формула площади поверхности сферического сегмента

Сферический сегмент — часть сферы, что отсекается от сферы плоскостью.

$$S_{сф.\ сегм.} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$$

Формула площади поверхности шарового сегмента

Шаровой сегмент — часть шара, что отсекается от шара плоскостью, и ограничивается кругом (основание шарового сегмента) и сферическим сегментом.

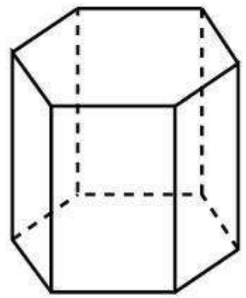
$$S_{шар.\ сегм.} = \pi(2Rh+a^2)=\pi(h^2+2a^2)$$

R — радиус шара;
D — диаметр шара;
h — высота сегмента;
a — радиус основания сегмента.

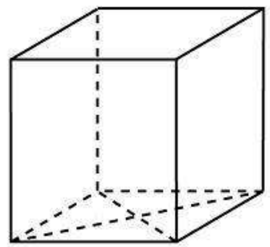
1.3.1. Задачи

I уровень

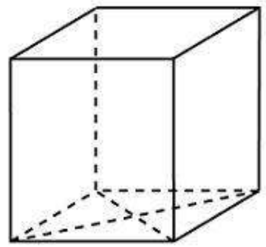
1. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 10.



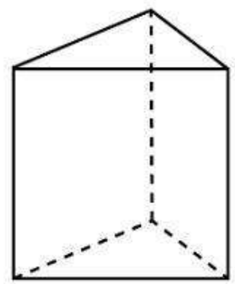
2. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.



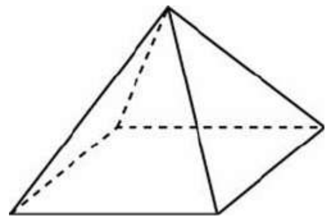
3. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.



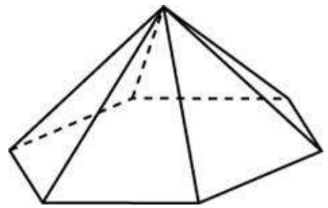
4. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.



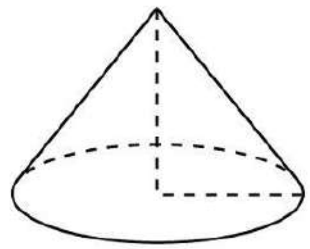
5. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



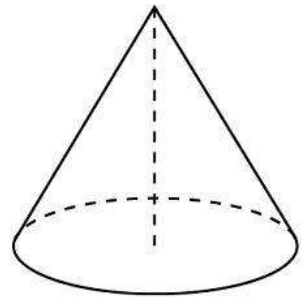
6. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



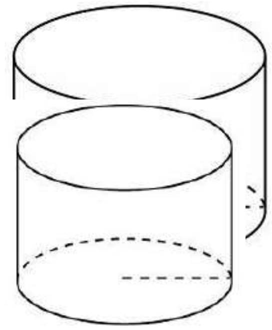
7. Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



8. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π.

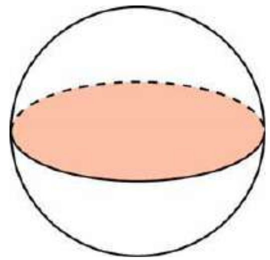


9. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

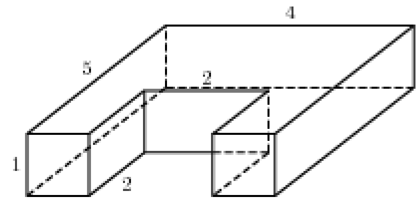


10. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

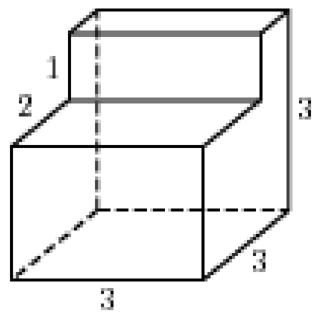
‘



11. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.



12. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



13. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

ОТВЕТЫ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
300	248	10	10	340	360	3	144	12	6	12	54	50

II уровень

1. Радиус круга ,вписанного в основание правильной треугольной призмы , равен $2\sqrt{3}$ см. Боковое ребро этой призмы равно 10 см .Вычислить боковую поверхность призмы.

2. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 8 см , а радиус окружности , описанной около её основания , равен $2\sqrt{3}$ см .Вычислить боковую поверхность пирамиды.

3. Площадь основания цилиндра равна 64π см^2, а его высота 10 см. Вычислить отношение боковой поверхности цилиндра к числу π.

4. В основании прямой призмы лежит четырёхугольник со сторонами 6,7,8 и 9. Боковое ребро призмы равно 10 см. Вычислить боковую поверхность призмы.

5. Радиус окружности ,описанной около основания правильной треугольной призмы , равен $2\sqrt{3}$ см. Боковое ребро призмы равно 10 см .Вычислить боковую поверхность этой призмы .

6. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 6 см , а радиус окружности , вписанной в её основание равен $\sqrt{3}$ см .Вычислить боковую поверхность пирамиды.

7. Высота цилиндра равна 12 см, а его диаметр 10 см. Вычислить отношение полной поверхности цилиндра к числу π.

8. Периметр основания правильной пятиугольной пирамиды равен 24 см, а её апофема 10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

9. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 5см. Боковое ребро призмы равно 10 см. Вычислить боковую поверхность этой призмы.

10. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого 64 см^2.Вычислить отношение боковой поверхности цилиндра к числу π.

11. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 6 см, а боковая сторона 5 см. Боковое ребро призмы равно 10 см. Вычислить боковую поверхность этой призмы.

12. В основании пирамиды лежит треугольник, периметр которого равен 24 см. Высоты всех боковых граней пирамиды равны 10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

13. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 10 см, а площадь её основания равна 16 см^2.Вычислить боковую поверхность пирамиды.

14. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 8 ,9 и 13 см. Высоты всех боковых граней пирамиды равны 10 см. боковую поверхность пирамиды.

15. Осевое сечение цилиндра является прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Вычислить отношение боковой поверхности цилиндра к числу π.

16. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13, 15 и 14 см. Основанием высоты пирамиды является центр окружности, вписанной в её основание. Высота боковой грани пирамиды, которая опирается на наименьшую сторону, равна 10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

17. В основании пирамиды лежит треугольник, площадь которого равна 60 см^2, а радиус окружности, вписанной в него, равен 5 см. Высоты всех боковых граней равны 10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

18. Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной 4 см. Вычислить отношение полной поверхности цилиндра к числу π.

19. В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Боковое ребро призмы10 см. Вычислить боковую поверхность призмы.

20. Площадь основания конуса равна 36π см^2, а его образующая 10 см. Вычислить отношение боковой поверхности конуса к числу π.

21. В основании пирамиды лежит ромб, высота которого равна 6 см, а его площадь 60 см^2.Высоты всех боковых граней равны 10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

22. Осевое сечение цилиндра является квадрат, диагональ которого равна 8 см. Вычислить отношение боковой поверхности цилиндра к числу π.

23. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 5 см. Основание высоты пирамиды равноудалено от сторон этого треугольника. Высота одной из боковых граней равна 10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

24. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 7,5см. Боковое ребро призмы равно 10 см. Вычислить боковую поверхность этой призмы.

25. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 12 см, а сторона её основания -10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

26. В основании пирамиды лежит правильный десятиугольник со стороной 5 см. Основанием высоты пирамиды является центр окружности, вписанной в основание этой пирамиды. Высота одной из боковых граней пирамиды равна 8 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

27. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 3 ,4 и 5 см. Боковое ребро равно 10 см. Вычислить боковую поверхность призмы.

28. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 6 см, а её апофема -10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

29. Высота основания правильной треугольной призмы равна $2\sqrt{3}$ см . Боковое ребро призмы равно 10 см. Вычислить боковую поверхность призмы.

30. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 6 см, а её апофема- 10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

ОТВЕТЫ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
360	72	160	300	180	54	170	120	160	64
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
200	120	80	150	48	210	120	24	280	60
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
200	32	75	300	240	200	120	180	120	120

III уровень

1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 3 см. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу, равна 13 см. Вычислить боковую поверхность призмы.

2. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 3 см, а апофема -5 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

3. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, в котором высота, проведённая к основанию, равна 16 см. Высоты всех боковых граней равны 10 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды, если её высота равна 8 см.

4. В цилиндре параллельно его оси проведено сечение, диагональ которого равна 20 см. Это сечение пересекает нижнее основание по хорде , длина которой 16 см .Вычислить отношение боковой поверхности цилиндра к числу π ,если расстояние от центра верхнего основания цилиндра до этой хорды равно $6\sqrt{5}$ см .

5. В основании пирамиды лежит ромб, площадь которого равна 600 см^2, а сторона –25 см. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей. Вычислить боковую поверхность пирамиды, если её высота равна 9 см.

6. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, площадь которого равна 150 см^2, а его периметр 60 см. Основанием высоты является точка пересечения биссектрис данного треугольника. Вычислить боковую поверхность пирамиды, если её высота равна 12 см.

7. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна 10 см .Вычислить боковую поверхность призмы, если радиус окружности ,описанной возле основания , равен $2\sqrt{3}$ см .

8. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5 см, а высота - $\sqrt{13}$ см . Вычислить боковую поверхность пирамиды.

9. Основанием пирамиды является правильный треугольник, сторона которого равна 12 см. Основанием высоты пирамиды является середина стороны этого треугольника. Высота большей боковой грани равна 6 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

10. В цилиндре на расстоянии 6 см от его оси и параллельно ей проведено сечение, диагональ которого равна 20 см. Вычислить отношение боковой поверхности цилиндра к числу π, если радиус его основания равен 10 см.

11. В правильной четырёхугольной призме диагональ равна 9 см, а диагональ основания -$4\sqrt{2}$ см . Вычислить полную поверхность призмы.

12. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20 см. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения биссектрис этого треугольника. Высота пирамиды равна 12 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

13. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ,сторона которого равна 6 см. Основанием высоты пирамиды является вершина этого треугольника .Боковое ребро пирамиды равно $3\sqrt{5}$см .Вычислить боковую поверхность пирамиды .

14. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна 13 см .Вычислить боковую поверхность призмы ,если радиус окружности ,вписанной в основание ,равен $2\sqrt{3}$ см .

15. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см ,а высота - $\sqrt{13}$ см . Вычислить боковую поверхность пирамиды.

16. В цилиндре на расстоянии 8 см от его оси и параллельно ей проведено сечение, диагональ которого равна 20 см. Вычислить отношение боковой поверхности цилиндра к числу π, если его высота равна 16 см.

17. В правильной четырёхугольной призме диагональ равна 9 см, а её высота – 3см. Вычислить полную поверхность призмы.

18. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, а боковая сторона – 10 см. Основанием высоты является точка пересечения биссектрис этого треугольника. Вычислить боковую поверхность пирамиды, если её высота равна 4 см.

19. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катет которого равен 15 см, а гипотенуза 25 см. Основанием высоты является точка пересечения биссектрис этого треугольника. Высота пирамиды равна 12 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

20. В правильной треугольной призме радиус окружности ,вписанной в основание ,равен $2\sqrt{3}$ см .Диагональ боковой грани образует с плоскостью основания угол 45^0 .Вычислить боковую поверхность призмы .

21. В правильной треугольной пирамиде высота равна $\sqrt{13}$ см ,а радиус окружности , вписанной в основание ,равен $\sqrt{3}$ см . Вычислить боковую поверхность пирамиды .

22. В цилиндре на расстоянии 24 см от его оси и параллельно ей проведено сечение, диагональ которого равна 25 см. Вычислить отношение боковой поверхности цилиндра к числу π, если это сечение пересекает основание по хорде, равной 20 см.

23. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник. Радиус вписанной в него окружности, равен 3 см, а высота, проведённая к его основанию, равна 8 см. Основание высоты попадает в точку пересечения биссектрис этого треугольника. Вычислить боковую поверхность пирамиды, если её высота равна 4 см.

24. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 25 см, а радиус вписанной в него окружности, равен 5 см. Высоты всех боковых граней пирамиды равны 13 см. Вычислить боковую поверхность пирамиды.

25. В правильной треугольной призме медиана основания равна $4\sqrt{3}$ см ,а диагональ боковой грани -10 см .Вычислить боковую поверхность призмы.

26. В правильной треугольной пирамиде высота равна $\sqrt{13}$ см ,а апофема – 4 см . Вычислить боковую поверхность пирамиды.

27. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, а высота, проведённая к ней, равна 8 см. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения биссектрис этого треугольника. Вычислить боковую поверхность пирамиды, если её высота равна 4 см.

28. В правильной треугольной призме площадь основания равна $4\sqrt{3}$ см^2 ,а диагональ боковой грани равна 5 см .Вычислить боковую поверхность призмы .

29. В правильной треугольной пирамиде высота равна $\sqrt{13}$ см ,а апофема – 4 см . Вычислить боковую поверхность пирамиды.

30. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями 10 и 24 см. Меньшая диагональ призмы равна 26 см. Вычислить полную поверхность призмы.

ОТВЕТЫ

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
144	80	320	240	750	390	144	36	90	240
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
144	390	36	180	36	320	144	80	390	432
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

24	780	80	390	144	36	80	36	36	1488

5.4 Угол между плоскостями

Двугранным углом называется фигура (рис. 1), образованную двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

Линейным углом двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

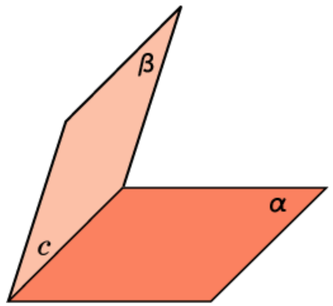


Рис. 1

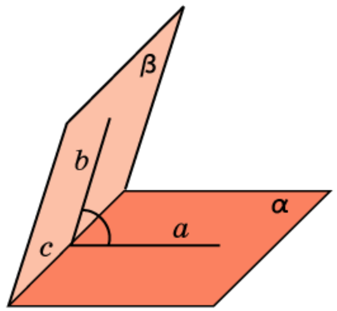
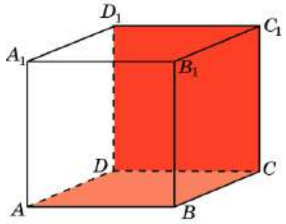


Рис. 2

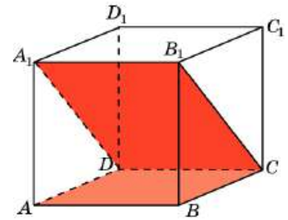
Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

1. КУБ



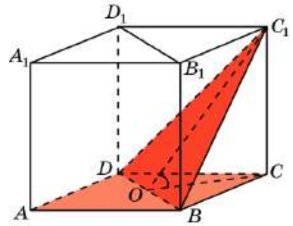
1.1. В кубе $A…D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1.

Ответ: 90°.



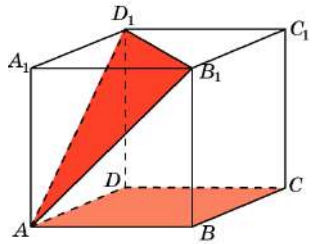
1.2. В кубе $A…D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDA_1.

Ответ: 45°.



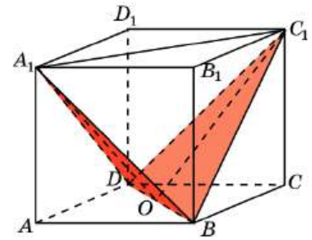
1.3. В кубе $A…D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BC_1D.

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.



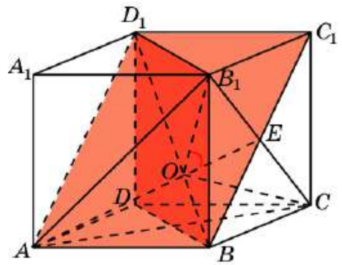
1.4. В кубе $A…D1$ найдите угол между плоскостями ABC и AB_1D_1.

Ответ: $\mathrm{arctg}\sqrt{2}$.



1.5. В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями BC_1D и BA_1D.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$/

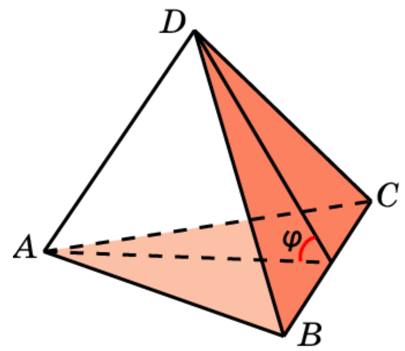


1.6. В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BB_1D_1.

Решение: *Заметим, что плоскость равностороннего треугольника ACB_1 перпендикулярна диагонали BD_1, которая проходит через центр O этого треугольника. Искомым линейным углом будет угол B_1OE, который равен 60^o.*

Ответ: 60^o.

2. ПИРАМИДА



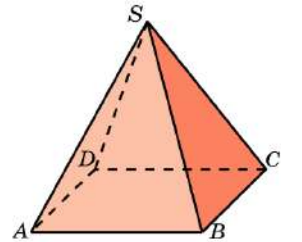
2.1. В тетраэдре $ABCD$, ребра которого равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

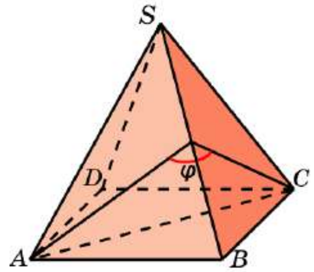
2.2. В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями *SBC* и *ABC*.

Ответ: arccos√3/3

2.3. В правильной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол, образованный гранями *SAB* и *SBC*.

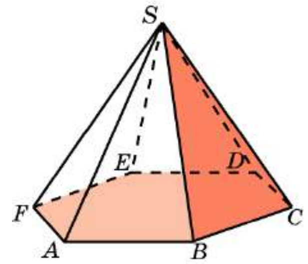


Решение: *Пусть E – середина ребра SB. Искомым линейным углом является угол AEC. В треугольнике AEC имеем:*

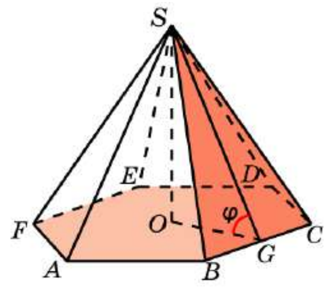


AC = √2 , AE = CE = √3/2. По теореме косинусов находим: cos ϕ = **-** *⅓.*

Ответ: arccos(-⅓).



2.4. В правильной 6-ой пирамиде *SABCDEF*, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите угол между плоскостями *ABC* и *SBC*.

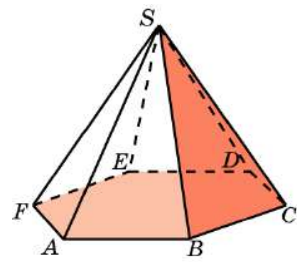


Решение: *Пусть O – центр основания, G – середин ребра BC. Искомым линейным углом* ***ϕ*** *является угол SGO. В прямоугольном треугольнике SGO имеем: OG =√3/2, SG =(√15)/2.*

Следовательно, cos ϕ = √5/5.

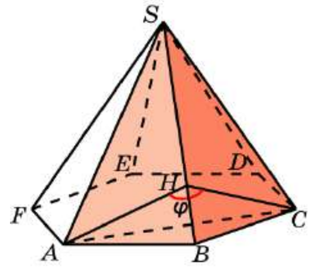
Ответ: arccos(√5/5).

2.5. В правильной 6-ой пирамиде *SABCDEF*, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите двугранный угол, образованный гранями *SAB* и *SB*

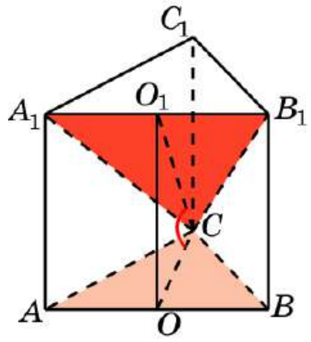


Решение: *В треугольниках SAB и SBC опустим высоты AH и CH на сторону SB. Искомым линейным углом* ***ϕ*** *является угол AHC. В прямоугольном треугольнике AHC имеем: AC = √3, AH = CH =(√15)//4. По теореме косинусов находим cos ϕ = - 0,6..*

Ответ: arccos(-0,6)

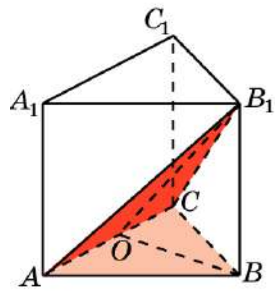


3. ПРИЗМА



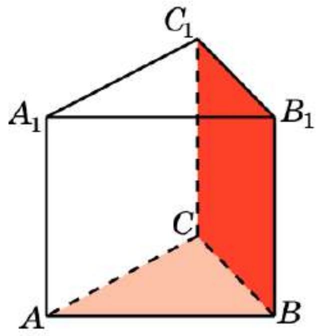
3.1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и A_1B_1C.

Ответ: arctg((2√3)/3).



3.2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ACB_1.

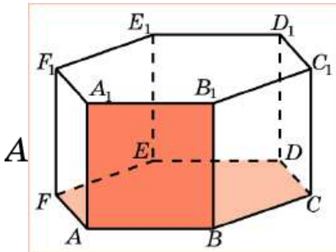
Ответ: arctg((2√3)/3).

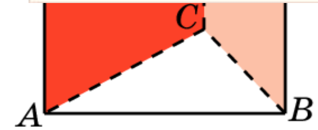


3.3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BB_1C_1.

Ответ: 90º.

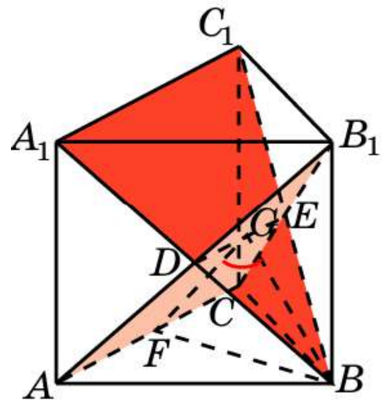
3.4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1.





Ответ: 60º.

3.5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACB_1 и A_1C_1B.



Решение: *данные плоскости пересекаются по прямой DE. Обозначим G середину DE и F середину AC. Угол BGF будет искомым. В треугольнике BGF имеем*

$BF = \sqrt{3}/2$; $BG = FG = \sqrt{7}/4$. По теореме косинусов, имеем

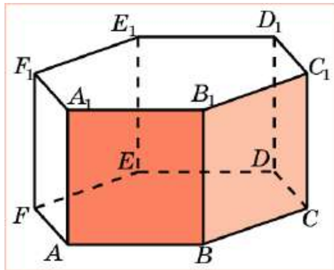
$\cos\boldsymbol{\phi} = 1/7$.

Ответ: arccos (1/7).

3.6. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ABB_1

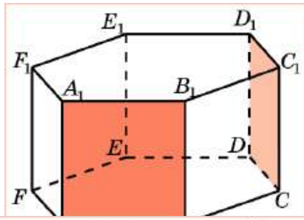
Ответ: 90º.

3.7. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABB_1 и BCC_1.



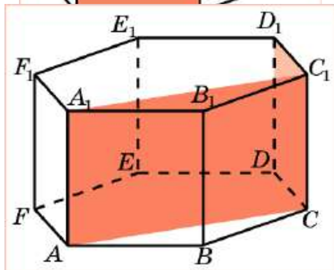
Ответ: 120º.

3.8. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABB_1 и CDD_1.



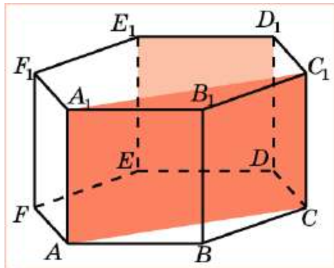
Ответ: 60º.

3.9. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и CDD_1.



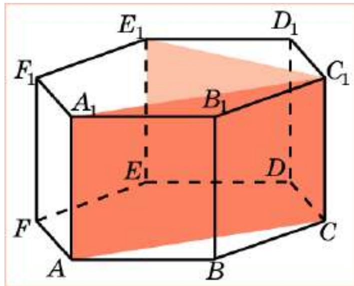
Ответ: 90º.

3.10. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и DEE_1.



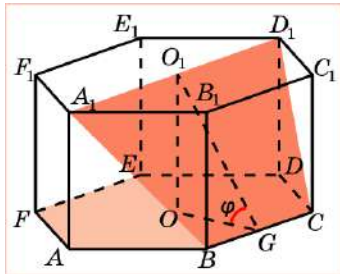
Ответ: 30º.

3.11. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и CEE_1.



Ответ: 60º.

3.12. В правильной 6-й призме $A\ldots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BCD_1.



Решение: *искомый угол равен углу O_1GO, где O, O_1 – центры оснований призмы, G – середина BC. В прямоугольном треугольнике O_1GO имеем: $OO_1 = 1$,*

$OG = \sqrt{3}/2$.

Следовательно, $tg\ \phi = ((2\sqrt{3})/3$.

Ответ: $\mathrm{arctg}((2\sqrt{3})/3)$.

Дополнительные задачи.

Задачи (базовый уровень)

№ 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и CDA_1.

Ответ: 45^0.

№ 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями ABC и BC_1D.

Ответ: $tg\varphi = \sqrt{2}$

№ 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1.

Ответ: 60^0.

№ 4. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и CDD_1.

Ответ: 90^0.

Задачи (повышенного уровень) .

№ 1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Ответ: $arctg\sqrt{10}$

№ 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 3, точка D – середина CC_1 . Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

Ответ: $arctg3$

№ 3. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите угол между двумя боковыми гранями пирамиды с общим боковым ребром.

Ответ: $arctg\frac{5\sqrt{39}}{7}$

№ 4. В правильной треугольной пирамиде MABC с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 5. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, на ребре AM – точка L. Известно, что AD = AE = AL = 4. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Ответ: $arctg\frac{2\sqrt{39}}{3}$

№ 5. В треугольной пирамиде MABC основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно $\sqrt{13}$. На ребре AC находится точка D, а на ребре AB находится точка E. Известно, что AD = 2, BE = 1. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и середину ребра MA.

Ответ: $arctg\frac{4\sqrt{3}}{3}$

№ 6. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD угол наклона бокового ребра к основанию ABCD равен 30^0. Найдите угол между соседними боковыми гранями пирамиды.

Ответ: $2arctg2$

№ 7. Отрезок AB = 24 – диаметр верхнего основания цилиндра, а C – точка на окружности нижнего основания. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра, если AC = 10 и BC = 22.

Ответ: $arctg\frac{\sqrt{5}}{10}$

№ 8. Высота конуса равна 1, а радиус его основания равен 7. Плоскость проходит через вершину конуса таким образом, что сечение конуса этой плоскостью является прямоугольным треугольником. Найдите синус угла, который эта плоскость образует с плоскостью основания.

Ответ: 0, 2

Задания для самостоятельной работы.

№ 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите углы между плоскостями ACC_1 и BDD_1.

Ответ: 90^0.

№ 2. В правильной шестиугольной призме A… F_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и CEE_1.

Ответ: 60^0

№ 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями

ABC и ACB_1.

Ответ: $tg\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

№ 4. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 4$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Ответ: $arctg\sqrt{17}$

№ 5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 3, боковые ребра равны 4, точка D – середина CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

Ответ: $arctg\dfrac{4}{3}$

№ 6. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. Найдите угол между двумя боковыми гранями пирамиды.

Ответ: $\arccos\dfrac{7}{16}$

№ 7. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, на ребре AM – точка L. Известно, что

$CD = BE = AL = 2$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Ответ: $arctg\frac{\sqrt{39}}{9}$

№ 8. В треугольной пирамиде MABC основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 5. На ребре AC находится точка D, а на ребре AB находится точка E, а на ребре AM – точка L. Известно, что

AD = AL = 2 и BE = 1. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Ответ: $arctg\frac{4\sqrt{3}}{3}$

№ 9. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD угол наклона бокового ребра к основанию равен 60^0. Найдите угол между соседними боковыми гранями пирамиды.

Ответ: $2arctg\frac{2\sqrt{3}}{3}$

№ 10. Отрезок AB = 8 – диаметр верхнего основания цилиндра, а C – точка на окружности нижнего основания. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра, если AC = 9 и BC = 11.

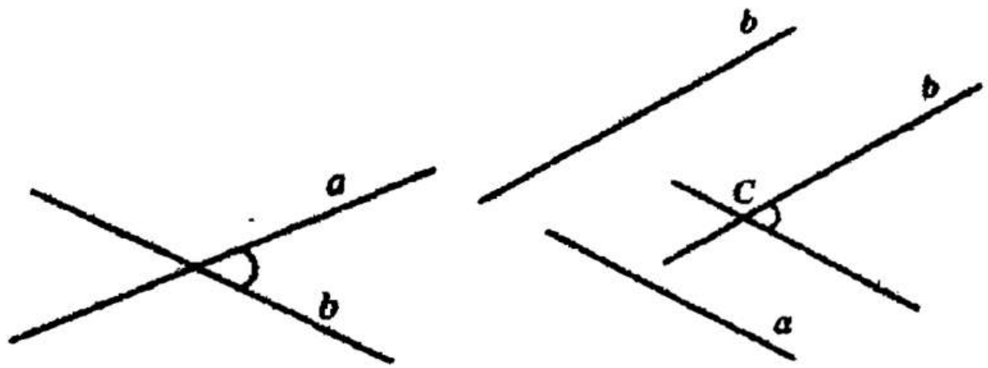
Ответ: $arctg\frac{2\sqrt{23}}{13}$

№ 11. Высота конуса равна 1, а радиус его основания равен 3. Плоскость проходит через вершину конуса таким образом, что сечение конуса этой плоскостью является прямоугольным треугольником. Найдите синус угла, который эта плоскость образует с плоскостью основания.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

5.6 Угол между двумя прямыми

Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами, лежащими на этих прямых, с вершиной в точке их пересечения.



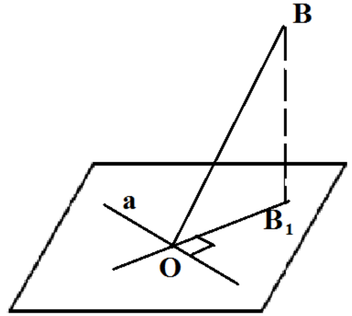
Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними

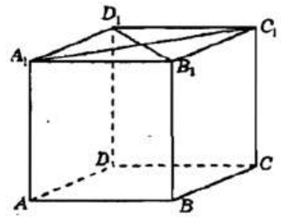
равен 90^0.

Для установления перпендикулярности скрещивающихся прямых используют следующую теорему о трех перпендикулярах.

Теорема. Если прямая *a*, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции OB_1 наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной OB.

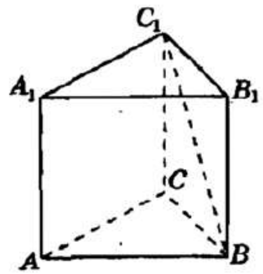


Задачи (базовый уровень).



№ 1. В кубе A… D_1 найдите углы между прямыми A_1C_1 и B_1D_1.

Ответ: 90^0.



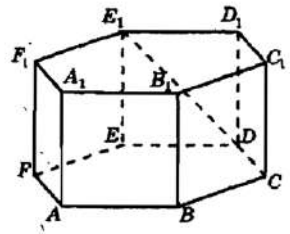
№ 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми

AA_1 и BC_1.

Ответ: 45^0.

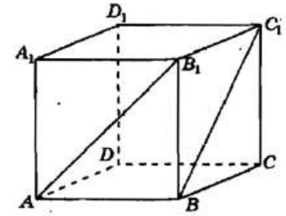
№ 3. В правильной шестиугольной призме A… F_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми

AA_1 и DE_1.



Ответ: 45^0.

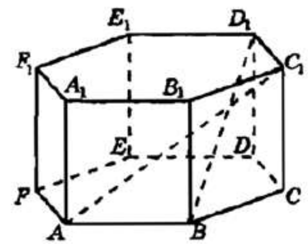
№ 4. В кубе A… D_1 найдите углы между прямыми AB_1 и BC_1.



Ответ: 60^0.

№ 5. В правильной шестиугольной призме A… F_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми

AC_1 и BD_1.



Ответ: $\arccos\frac{5}{8}$

Задачи (Повышенный уровень)

№ 1. Точка M – середина ребра C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2. Найдите угол между прямыми AM и BA_1.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$

№ 2. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды SABC равно 6, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{1}{9}$. Точка M – середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

Ответ: $\frac{\sqrt{41}}{123}$.

№ 3. В основании правильной четырехугольной пирамиды SABCD лежит квадрат ABCD со стороной 2. Боковое ребро SA, равное 3, перпендикулярно плоскости основания. Плоскость, перпендикулярная ребру SC и проходящая через точку A, пересекает прямые SB, SC и SD в точках M, H и K соответственно. Найдите угол MHK.

Ответ: $2\arcsin\sqrt{\frac{17}{26}}$

№ 4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны 1

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Ответ: 0,25.

№ 5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые ребра 11.

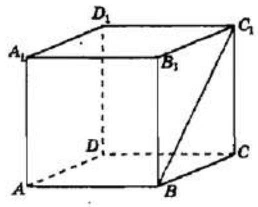
а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1, F_1.

Ответ: 105

Задания для самостоятельной работы.

№ 1. В кубе A… D_1 найдите углы между прямыми AA_1 и BC_1.



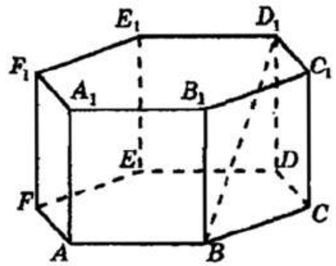
Ответ: 45^0.

№ 2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1C_1.

Ответ: 60^0.

№ 3. В правильной шестиугольной призме A… F_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми

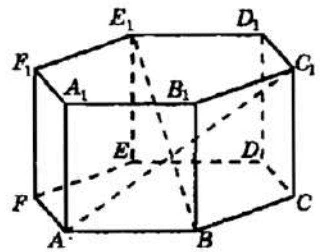
AA_1 и BD_1.



Ответ: 60^0.

№ 4. В правильной шестиугольной призме A… F_1, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми

AC_1 и BE_1.



Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$

№ 5. Точка M – середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром равным 3. Найдите угол между прямыми D_1M и DC_1.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$

№ 6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды SABC равно 10, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{17}{25}$. Точка M – середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

Ответ: $\frac{17\sqrt{57}}{285}$

№ 7. В основании четырехугольной пирамиде SABCD лежит квадрат со стороной 3, а боковое ребро SA, равное 4, перпендикулярно плоскости основания. Плоскость, перпендикулярная ребру SC и проходящая через точку A, пересекает прямые SB, SC и SD в точках M, H и K соответственно. Найдите угол MHK.

Ответ: $2\arcsin\frac{\sqrt{17}}{5}$

№ 8. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с вершиной S сторона основания равна 4. Точка L – середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SAравен $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

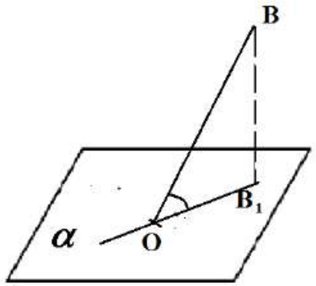
а) Пусть O – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

Ответ: 80

5.7 Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.



Считают так же, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол, а угол между прямой и параллельной ей плоскостью считается равным нулю.

Задачи (базовый уровень).

№ 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.

Ответ: 45^0

№ 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

№ 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB и плоскостью A_1BC_1.

Ответ: $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

№ 4. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABD_1.

Ответ: 60^0

№ 5. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AD_1 и плоскостью ABC.

Ответ: $tg\varphi = \dfrac{1}{2}$

Задачи (Повышенный уровень).

№ 1. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K - середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении AM : MC = 1 : 3.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если AB = 8, AC = 12 и $AA_1 = 5$. *Ответ:* $\arcsin\frac{3\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}$

№ 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$

а) Докажите, что плоскости ABC_1 и CDA_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 *Ответ:* $arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$

№ 3.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, AB = 2, AD = AA_1 = 1. Найдите угол между прямой A_1B_1 и плоскостью AB_1D_1. *Ответ:* $arctg\frac{\sqrt{2}}{4}$

№ 4. У правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна AB = 6, боковое ребро $AA_1 = 8$. Найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью BCA_1. *Ответ:* $\frac{12\sqrt{273}}{455}$

№ 5.

Высота SO правильной треугольной пирамиды SABC составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и ее боковым ребром. *Ответ:* $arctg\frac{5\sqrt{6}}{24}$

Задания для самостоятельной работы.

№ 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1.

Ответ: 45^0

№ 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

Ответ: $tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

№ 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.

Ответ: $tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

№ 4. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

Ответ: 30^0

№ 5.

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка К - середина ребра A_1B_1, а точка М делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если AB = 5,

AC = 8 и $AA_1 = 4$. *Ответ*: $\arcsin \frac{12}{5\sqrt{73}}$

№ 6. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF с вершиной S боковые ребра равны 2, а стороны основания – 1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через вершину S и середины ребер AF и CD, перпендикулярна плоскости основания.

б) Найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$

№ 7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра AB = 3,

$AD = AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой A_1B_1 и плоскостью AB_1D_1.

Ответ: $arctg \frac{\sqrt{2}}{3}$

№ 8. У правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна

AB = 5, боковое ребро $AA_1 = 12$. Найдите синус угла между прямой BC_1 и плоскостью BCA_1.

Ответ: $\frac{60}{13\sqrt{217}}$

№ 9. Высота SO правильной треугольной пирамиды SABC составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и ее боковым ребром.

Ответ: $arctg\frac{2}{3}$