«Смешанные неравенства» (метод интервалов)

Попова Ирина Николаевна,
учитель математики,
МБОУ СОШ № 6 им. Ю. А. Гагарина
Кавказский район

Метод интервалов

Методом интервалов решают неравенства вида

$f(x)>0$, ($f(x)<0$, $f(x)\le 0$, $f(x) \ge 0$)

Алгоритм метода интервалов.

1. Находим область определения функции *f(x)* и промежутки, на которых функция непрерывна.

2. Находим нули функции, то есть решения уравнения $f(x)=0$.

3. На числовую прямую наносим область определения и нули функции *f(x)*, причём ***в случае строгого знака неравенства нули «выкалываем».***

4. Определяем интервалы знакопостоянства функции *f(x)*.

5. В соответствии с заданным знаком неравенства, записываем ответ.

Если точка является нулем функции или не принадлежит области определения функции, это НЕ ОЗНАЧАЕТ, что при переходе через такую точку функция автоматически меняет знак, а промежутки знакопостоянства чередуются.

Пример 1. Решите неравенство: $4x^2-10x-\frac{8x^3-42x^2+75x-51}{2x-5}\le -9$

Решение: приведем рациональное выражение к общему знаменателю:

$$\frac{(4x^2-10x)(2x-5)-8x^3-42x^2+75x-51+9(2x-5)}{2x-5}\le 0,$$

$$\frac{2x^2-7x+6}{2x-5}\le 0.$$

Рассмотрим $f(x)=\frac{2x^2-7x+6}{2x-5}$ - непрерывную на каждом промежутке области определения.

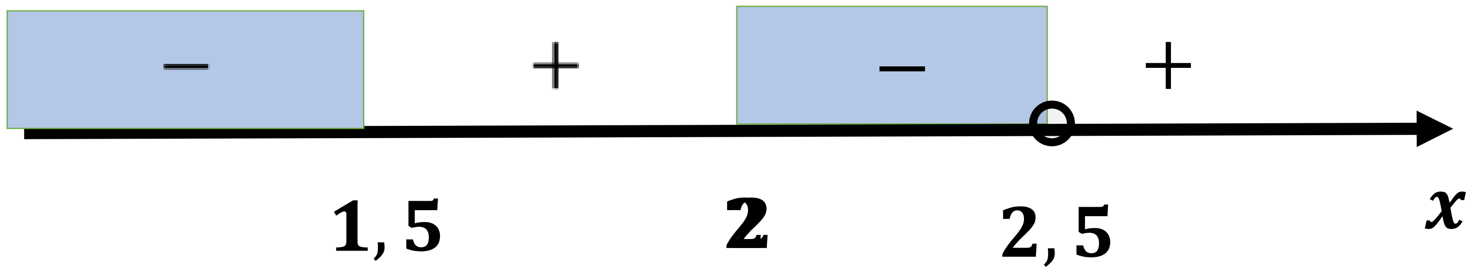
Функция не определена при $x=2{,}5$, значит

$$D(f)=(-\infty;2{,}5)\cup(2{,}5;\ +\infty).$$

Нули *f(x)*: $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$$D = b^2 - 4ac,\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1{,}5, \qquad x_2 = 2$$



Выбираем интервалы, где $f(x) \leq 0$

Ответ $(-\infty; 1,5] \cup [2; 2,5)$.

Пример 2. Решите неравенство: $\frac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{x^2-16} \le 0$

Решение

Разложим знаменатель на множители:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\frac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{(x-4)(x+4)} \le 0$$

Рассмотрим $f(x) = \frac{(|x-3|-x-13)(\sqrt{x+6}-2x+3)}{(x-4)(x+4)}$.

Область определения функции задается системой

$$\begin{cases} x + 6 \ge 0, \\ (x-4)(x+4) \ne 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge -6, \\ x \ne \pm 4. \end{cases}$$

$$D(f) = [-6;\ -4) \cup (-4; 4) \cup (4;\ +\infty)$$

Найдем нули *f(x)*:

1. $|x-3|-x-13=0,$

$|x-3|=x+13,$

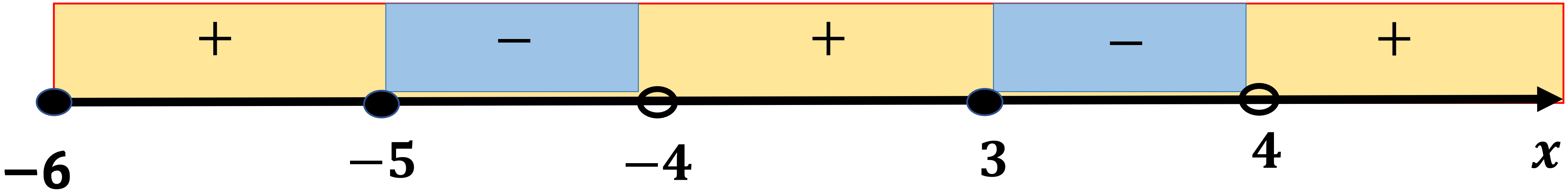
$$\begin{cases} x+13\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x-3=x+13, \\ x-3=-x-13; \end{array}\right. \end{cases} \quad x=-5$$

2. $\sqrt{x+6}-2x+3=0,$

$\sqrt{x+6}=2x-3,$

$$\begin{cases} 2x-3\geq 0 \\ x+6=4x^2-12x+9, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4}, \\ x=3; \end{array}\right. \end{cases} \quad x=3.$$



Выбираем интервалы, где $f(x)\leq 0$

Ответ: $[-5;\ -4)\cup[3;4)$

Пример 3. Решить неравенство: $log_{6x^2-x-1}(2x^2-5x+3) \geq 0$

Решение.

$$log_{6x^2-x-1}(2x^2-5x+3) = \frac{ln(2x^2-5x+3)}{ln(6x^2-x-1)}$$

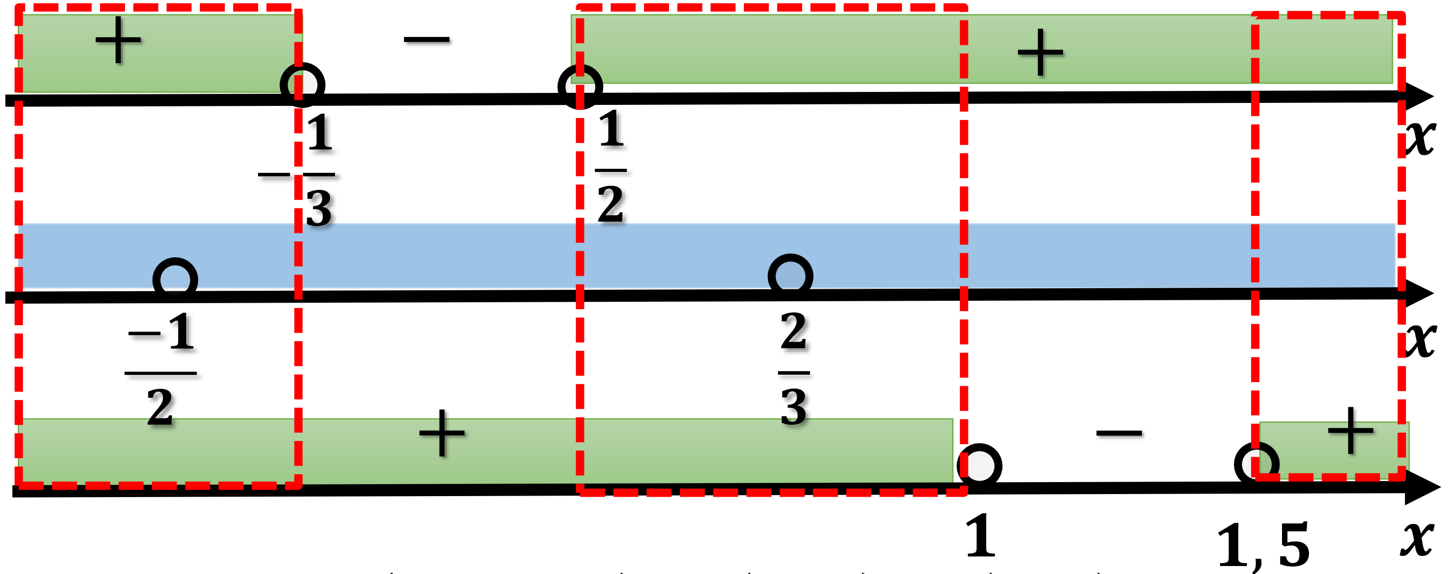
$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

$$\frac{ln(2x^2-5x+3)}{ln(6x^2-x-1)} \geq 0$$

Рассмотрим $f(x) = \frac{ln(2x^2-5x+3)}{ln(6x^2-x-1)}$ и найдем *D(f)*:

$$\begin{cases} 6x^2-x-1>0, \\ 6x^2-x-1 \neq 1, \\ 2x^2-5x+3>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-1)(3x+1)>0, \\ (2x+1)(3x-2) \neq 0, \\ (x-1)(2x-3)>0; \end{cases}$$



$$D(f) = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1{,}5; +\infty)$$

Нули функции: $ln(2x^2 - 5x + 3) = 0,$

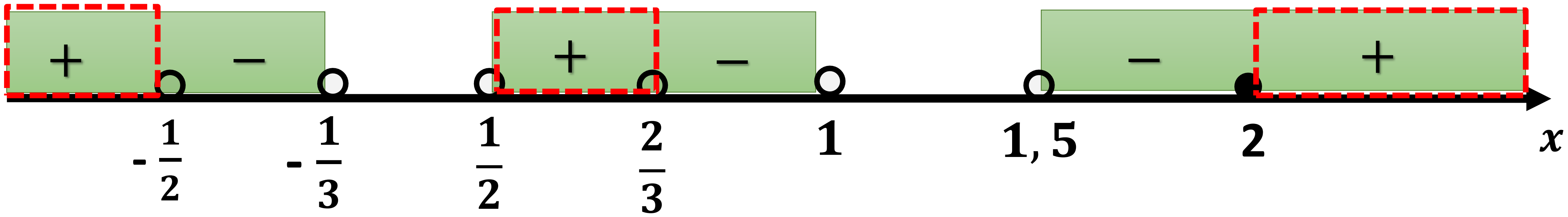
$$2x^2 - 5x + 3 = 1,$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}, \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2} \notin D(f)$$

С учетом найденной области определения, которая выделена зелёным цветом:



Выбираем интервалы, где $f(x) \geq 0$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup [2; +\infty).$

Пример 4. Решить неравенство $4^{\frac{9x^2}{4}} - (\frac{3x}{2}+1)^{\frac{9x^2-4}{4log_2(\frac{3x}{2}+1)}} \leq 3.$

Решение Преобразуем $\frac{1}{log_2(\frac{3x}{2}+1)} = log_{(\frac{3x}{2}+1)}2$

$$\frac{1}{log_a b} = log_b a$$

$$4^{\frac{9x^2}{4}} - (\frac{3x}{2}+1)^{(log_{(\frac{3x}{2}+1)}2)\cdot\frac{9x^2-4}{4}} - 3 \leq 0$$

Рассмотрим $f(x) = 4^{\frac{9x^2}{4}} - (\frac{3x}{2}+1)^{(log_{(\frac{3x}{2}+1)}2)\cdot\frac{9x^2-4}{4}} - 3$ и найдем $D(f)$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2}+1 > 0, \\ \frac{3x}{2}+1 \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -\frac{2}{3}, \\ x \neq 0. \end{cases} \qquad D(f) = \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$$

Нули функции $4^{\frac{9x^2}{4}} - \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{9x^2}{4}} - 3 = 0,$

$$2\cdot(2^2)^{\frac{9x^2}{4}} - 2^{\frac{9x^2}{4}} - 6 = 0$$

Замена: $t = 2^{\frac{9x^2}{4}},\ t > 0$

$$2t^2 - t - 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -\frac{3}{2}; \end{array}\right. \quad t = 2.$$

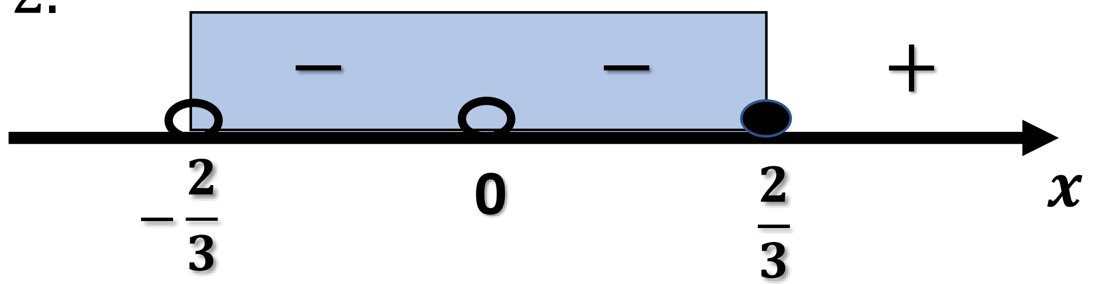
Обратная замена: $2^{\frac{9x^2}{4}} = 2$

$$\frac{9x^2}{4} = 1,$$

$$9x^2 = 4,$$

$$x^2 = \frac{4}{9},$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{2}{3}, \\ x = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$$



Выбираем интервалы, где $f(x) \le 0$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};0\right) \cup \left(0;\frac{2}{3}\right]$

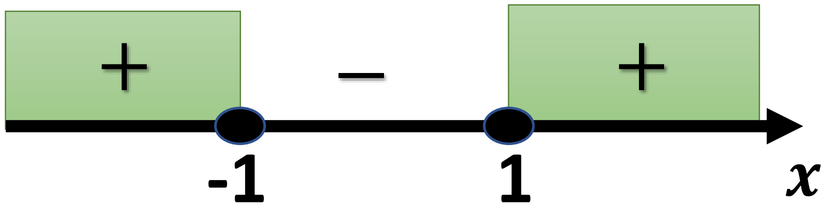
Пример 5. Решить неравенство $x(x^2+4x+4)\sqrt{x^2-1} \le 0$

Решение. Рассмотрим $f(x) = x(x^2+4x+4)\sqrt{x^2-1}$

Найдём *D(f)*: $x^2 - 1 \ge 0$

$(x-1)(x+1) \ge 0$

D(f)$=(-\infty;\ -1] \cup [1;\ \infty)$

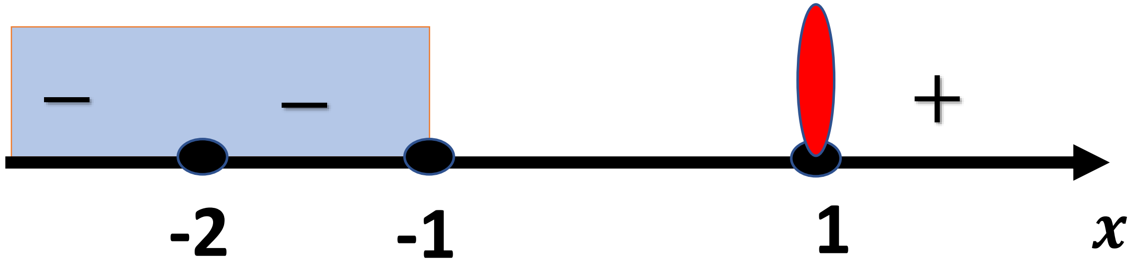


Нули функции: $x(x^2+4x+4)\sqrt{x^2-1} = 0$

$x = 0,$ или $x^2+4x+4 = 0,$ или $x^2 - 1 = 0$

$0 \notin D(f)$ $(x+2)^2 = 0$ $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

$x = -2$ (2 кратности)



Выбираем интервалы, где $f(\mathrm{x}) \le 0$

Ответ $(-\infty;\ -1] \cup \{1\}$

Пример 6. Решить неравенство $\frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1 \geq 0$

Решение. Рассмотрим $f(x) = \frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2}-1} + 1$

$D(f)$: $2^{2-x^2} - 1 \neq 0$

$2 - x^2 \neq 0$

$x \neq \pm\sqrt{2}$ $\qquad D(f) = (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2};\ \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$

Найдем нули функции $f(x) = 0$ $\qquad \frac{3}{(2^{2-x^2}-1)^2} - \frac{4}{2^{2-x^2} - 1} + 1 = 0$

Обозначим $2^{2-x^2} - 1 = t, t \neq 0$

$$\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t} + 1 = 0$$

$$\frac{3 - 4t + t^2}{t^2} = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

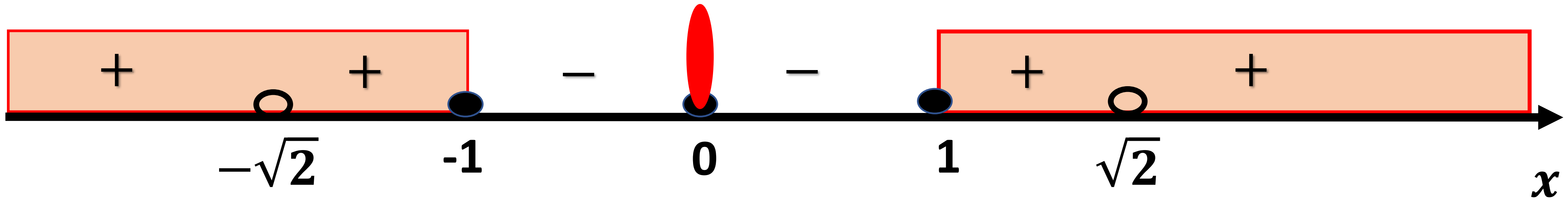
$$a + b + c = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \frac{c}{a} \end{array}\right.$$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} 2^{2-x^2} - 1 = 1, \\ 2^{2-x^2} - 1 = 3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^{2-x^2} = 2, \\ 2^{2-x^2} = 4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2 - x^2 = 1, \\ 2 - x^2 = 2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Отмечаем полученные точки и область определения на координатной оси и находим знак функции на каждом интервале области определения



Выбираем интервалы, где $f(x) \geq 0$

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2};\ -1] \cup \{0\} \cup [1;\ \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty).$